L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants, à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice - Polynômes de Laguerre
(Noté sur 4 points sur 20)

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.

2. Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

4. Conclure que $\left(X^k \mid 1\right) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$.

8. On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8.1. Quelle est la dimension de $\ker\left(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$?

8.2. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 , vérifiant

$$\alpha\left(P_k\right) = -kP_k$$

8.3. Justifier que P_k est de degré k.

9. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

10. On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

10.1. Montrer que

$$(\alpha(P) \mid Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

10.2. En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.

11. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5623 - Wadifa Info - page 1/5

Problème

Si n est un entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de cet ensemble.
Si A est une matrice, on note $A^\top$ sa transposée. $\mathrm{Tr}(A)$ désigne la trace de A.
On rappelle que la matrice A est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.
On identifie dans tout ce problème $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des matrices colonnes à n lignes.
Si E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F. On note E^* l'espace $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires sur E.
Dans tout le problème, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère les applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \tau_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AM) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \gamma_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

1ère Partie - Un exemple

Dans cette partie, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1.2. La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser une base de vecteurs propres.

1.3. On pose

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.1. Vérifier que la famille $\mathcal{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.3.2. Calculer $\phi_A(E_{ij})$ pour tout $1 \leq i, j \leq 2$.

1.3.3. Donner la matrice de ϕ_A dans la base $\mathcal{E}$.

1.3.4. L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ? Si oui, préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres de ϕ_A (on rappelle qu'ici, un vecteur propre sera une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

2ère Partie - Réduction de l'endomorphisme ϕ_A

On se fixe maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $\phi_A(M) = \lambda M$. Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

2.2. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de ϕ_A, c'est également une valeur propre de A.

2.3. Soit μ une valeur propre de A, X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \mu X$. Soit M une matrice dont une colonne est égale à X et toutes les autres colonnes sont nulles. Montrer que M est un vecteur propre de ϕ_A.

2.4. Comparer l'ensemble des valeurs propres de ϕ_A avec celui de A.

2.5. Montrer que si A est diagonalisable, ϕ_A l'est également.
On pourra, à partir d'une base de vecteurs propres de A, construire une base de vecteurs propres de ϕ_A.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5623 - Wadifa Info - page 2/5

3ère Partie - Un théorème de factorisation

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,G)$. On note $\dim(E)$ la dimension de E.
Le but de cette partie est de montrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v) \iff \exists w \in \mathcal{L}(F,G), v = w \circ u.$$

3.1. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

3.2. On suppose que $\dim(E) = n$, $\dim(\ker(u)) = n - p$ et $\dim(F) = r$ où n, p et r sont des entiers naturels.

3.2.1. Justifier pourquoi on peut choisir $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ base de E de sorte que $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

3.2.2. Quelle est alors la dimension de $\mathrm{Im}(u)$?

3.2.3. Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

3.2.4. On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1\leq i\leq r}$ soit une base de F. On définit alors $w \in \mathcal{L}(F,G)$ par :

$$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } 1 \leq i \leq p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que, si $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$, alors $v = w \circ u$.

4ère Partie - Une caractérisation des matrices nilpotentes

4.1. Montrer que si λ est une valeur propre (éventuellement complexe) de A, alors, pour tout entier naturel non nul k, λ^k est une valeur propre de A^k.

4.2. Soit $K = (k_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.2.1. Vérifier que

$$\mathrm{Tr}\left(K^\top K\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}^2.$$

4.2.2. Pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}\left(M^\top N\right).$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.3. Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{c} T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* \\ U \longmapsto \tau_U \end{array} \quad \text{où} \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \tau_U(M) = \mathrm{Tr}\left(UM\right)$$

4.3.1. Montrer que T est un isomorphisme.

4.3.2. En déduire que, pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, il existe une unique matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = \mathrm{Tr}\left(UM\right).$$

4.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose, dans cette question, que A est nilpotente.

4.4.1. Montrer que la seule valeur propre de A est 0 .

4.4.2. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

4.4.3. Soit M une matrice telle que $AM = MA$. Montrer que la matrice AM est encore nilpotente.

4.4.4. En déduire que $\mathrm{Ker}\,\gamma_A \subset \mathrm{Ker}\,\tau_A$.

4.4.5. Établir l'existence d'une matrice B telle que $\tau_A = \tau_B \circ \gamma_A$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5623 - Wadifa Info - page 3/5

4.4.6. Montrer que $A = BA - AB$.

4.5. On suppose maintenant qu'il existe une matrice B telle que $A = BA - AB$.

4.5.1. Montrer que, pour tout entier naturel k, $BA^k - A^kB = kA^k$.

4.5.2. A quelle condition la matrice A^k est-elle un vecteur propre de γ_B ?

4.5.3. En déduire que A est nilpotente.

5ère Partie - Étude des valeurs propres de γ_A

Dans cette partie, même si la matrice A est réelle, on la considère comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ce qui est possible car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
On prolonge γ_A en un endomorphisme $\widetilde{\gamma}_A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \widetilde{\gamma}_A(M) = AM - MA.$$

La matrice A étant réelle, on admettra que γ_A et $\widetilde{\gamma}_A$ ont les mêmes polynômes caractéristiques :

$$\chi_{\gamma_A} = \chi_{\widetilde{\gamma}_A}.$$

5.1. Soient α et β deux valeurs propres complexes de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = \alpha X$.

5.1.1. Justifier qu'il existe un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, tel que $A^\top Y = \beta Y$.

5.1.2. En calculant $\widetilde{\gamma}_A\left(XY^\top\right)$, montrer que $\alpha - \beta$ est une valeur propre de γ_A.

5.1.3. En déduire $\alpha - \bar{\alpha}$ est une valeur propre de $\widetilde{\gamma}_A$.

5.1.4. Établir que si γ_A est trigonalisable alors A est trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

5.2. Soit λ une valeur propre (complexe) de $\widetilde{\gamma}_A$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\widetilde{\gamma}_A(M) = \lambda M$.

5.2.1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k M = M\left(A + \lambda I_n\right)^k.$$

5.2.2. En déduire que,

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P(A)M} = \mathrm{MP}\left(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n\right).$$

puis que $\chi_{\mathrm{A}}\left(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n\right)$ n'est pas inversible.

5.2.3. En écrivant

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i).$$

les α_i étant complexes et éventuellement égaux (comptés avec leur multiplicité), montrer qu'il existe deux indices i et j tels que $\lambda = \alpha_i - \alpha_j$.

5.2.4. Si on suppose A trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), γ_A est-il trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) ?

5.3. Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer que le polynôme caractéristique de T est : $\chi_{\mathrm{T}} = X^n$.

5.3.1. On suppose, dans cette question, qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A - \alpha \mathrm{I}_n$ soit nilpotente.

5.3.2. Déterminer les valeurs propres (éventuellement complexes) de A.

5.3.3. En déduire que γ_A est nilpotent.

5.4. On suppose cette fois que γ_A est nilpotent.

5.4.1. Déterminer les valeurs propres de $\widetilde{\gamma}_A$ et en déduire que A ne possède qu'une seule valeur propre complexe α.

5.4.2. Justifier que $\alpha \in \mathbb{R}$ puis que $A - \alpha \mathrm{I}_n$ est nilpotente.

FIN DU SUJET

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5623 - Wadifa Info - page 4/5

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج معاهد التكوين المهني في الميدان الصحي (IFPS) - شعبة مساعد في العلاج

Modèle de concours : accès aux Instituts de Formation Professionnelle dans le domaine de la Santé (IFPS) – Ministère

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2215

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me