

Épreuve de Mathématiques

Date: 13/07/2022

Durée: 3h

Consignes générales à lire très attentivement

1. L'usage de téléphone portable ou de calculatrice est strictement interdit.
2. L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple (QCM).
3. Cette épreuve comporte quatre parties indépendantes. Chaque partie comporte 5 questions indépendantes, donc au total l'épreuve comporte 20 questions. Les questions sont numérotées de 1 à 20. L'épreuve comporte 5 pages.
4. Certaines questions peuvent avoir plusieurs réponses. Ces réponses sont numérotées de a) à d).
5. A chaque question numérotée entre 1 et 20, correspond sur la feuille de réponse, une ligne de cases qu'il faut cocher, et qui porte le même numéro. Chaque ligne comporte 4 cases a), b), c) et d).
6. Dans la feuille de réponse, mettez un x dans les cellules correspondant aux bonnes réponses relatives aux questions 1 à 20.

Partie 1

Question 1 : Quelles sont les assertions vraies ?

- a) $\frac{1}{2} = 0,142142142 \dots$
- b) Le nombre dont l'écriture décimale est $0,090909 \dots$ est un nombre rationnel.
- c) $9,99999 \dots = 10$
- d) $\frac{1}{3} = 0,202020 \dots$

Question 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \sin(x)/x$. L'étude de cette fonction montre que

- a) f est continue en 0 et sa limite vaut 1.
- b) f n'est pas continue en 0.
- c) f est prolongeable par continuité en 0.
- d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$. L'étude de cette fonction montre que

- a) f est continue en $(0,0)$ et sa limite vaut $1/2$.
- b) f n'est pas continue en $(0,0)$.
- c) f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ et sa limite vaut 0.
- d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 4 : Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120.$$

L'étude de cette fonction montre que

- a) f admet un minimum global au point $(6,3)$.
- b) f admet un maximum local au point $(6,3)$.
- c) f n'a pas de maximum global.
- d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 5 : Parmi les propriétés suivantes, quelles sont celles qui impliquent que f est continue en x_0 ?

- a) $f(x)^2 \rightarrow f(x_0)^2$ (lorsque $x \rightarrow x_0$).
- b) $f(x)^3 \rightarrow f(x_0)^3$ (lorsque $x \rightarrow x_0$).
- c) $E(f(x)) \rightarrow E(f(x_0))$ (lorsque $x \rightarrow x_0$), avec $E(\cdot)$ est la fonction partie entière.
- d) $\exp(f(x)) \rightarrow \exp(f(x_0))$ (lorsque $x \rightarrow x_0$).

Partie 2

Question 6 : On considère le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 7 \mid 8 - x < y < x + 1\}$.
 $\int \int_D \frac{1}{(x+y)^2} dx dy$ vaut

- a) $\frac{\ln(2)}{3}$
- b) $\frac{2}{3} \ln(2)$
- c) $\frac{1}{3} \ln\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{1}{18}$
- d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 7 : Soit I l'intégrale de Gauss définie par

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

On définit deux fonctions f, g sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

Après calcul, on peut déduire que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

- a) $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{2}$.
- b) $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$.
- c) $I = \sqrt{\pi}$.
- d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 8 : Soit $u_n = \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right|$

- a) La suite (u_n) est monotone.
- b) Les suites (u_{2n}) et (u_{4n+1}) convergent vers la même limite.
- c) La suite (u_n) est divergente.
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Question 9 : Pour $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$I_n = \int_0^1 t^n e^t dt.$$

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

- a) croissante.
- b) décroissante.
- c) convergente vers 0.
- d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 10 : On considère l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n + 1.$$

La fonction f est

- a) surjective et non injective.
- b) injective et non surjective.
- c) bijective.
- d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Partie 3

Question 11 : Soit $A(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Soit $B(X) = \sum_{j=0}^m b_j X^j$.
Soit $C(X) = A(X) \cdot B(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$. Quelles sont les assertions vraies ?

- a) $c_k = a_k b_k$.
- b) $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_i$.
- c) $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.
- d) $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$.

Question 12 : On considère les fonctions réelles f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x) = \sin(x), \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x) \cos(x)$$

et E l'espace engendré par ces fonctions. Quelles sont les assertions vraies ?

- a) $\{f_1, f_2\}$ est une base de E .
- b) $\{f_1, f_3\}$ est une base de E .
- c) $\dim E = 2$.
- d) $\dim E = 3$.

Question 13 : On considère E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que :
 $f^2 + f + Id = 0$, où Id est l'application identité de E . Quelles sont les assertions vraies ?

- a) $\dim \ker f = 1$.
- b) f est injective.
- c) f est bijective et $f^{-1} = f^2$.
- d) f est bijective et $f^{-1} = -f - Id$.

Question 14 : Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et f l'application définie par :

$$f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M - M^t$$

M^t est la transposée de M . Quelles sont les assertions vraies ?

- a) f est une application linéaire, symétrique.
- b) $\dim \ker f = 3$.
- c) $\dim \text{Im} f = 2$.
- d) $\dim \text{Im} f = 3$.

Question 15 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $N = A - aI$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Quelles sont les assertions vraies ?

- a) $N^k = 0$, pour tout entier $k \geq 3$.
- b) On ne peut pas appliquer la formule du binôme pour le calcul de A^n . (La formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}$)
- c) Pour tout entier $n \geq 2$, $A^n = a^n I + na^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} N^2$.
- d) Pour tout entier $n \geq 2$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \\ 0 & a^n & 2na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$.

Partie 4

Question 16 : On considère la série statistique double suivante

x_i	2	5	6	10	12
y_i	83	70	70	54	49

La droite de régression linéaire de la série statistique (x_i, y_i) obtenue par la méthode des moindres carrés est

- a) $Y = -X + 72,2$
- b) Croissante.
- c) $Y = -3,4X + 80$

d) La même que la droite obtenue par la méthode d'interpolation de Lagrange.

Question 17 : Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p , l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1 - p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte. Il existe une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n donnée par

- a) $p_{n+1} = (p - 1)p_n + (1 - p)$
- b) $p_{n+1} = (2p - 1)p_n + (1 - p)$
- c) $p_{n+1} = p_n + (1 - p)$
- d) $p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}$

Question 18 : La trajectoire Γ d'une particule en mouvement est donnée par les équations

$$x(t) = \frac{t}{4 - t^2} \text{ et } y(t) = \frac{t^2}{2 - t}$$

- a) Γ admet un seul point stationnaire.
- b) La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote quand t tend vers -2 .
- c) La droite d'équation $y = 8x - 3$ est une asymptote quand t tend vers 2 .
- d) Le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 2)$ est un point double.

Question 19 : On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y \tan(x) = 1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Parmi les affirmations suivantes, choisir celles qui sont vraies :

- a) La solution générale de l'équation homogène est $y = \frac{k}{\cos(x)}, k \in \mathbb{R}$.
- b) Si $y = \frac{k \sin(x)}{\cos(x)}$ est une solution de (E), alors $k'(x) = \cos(x)$.
- c) La solution générale de (E) est $y = \frac{k}{\cos(x)} + \sin(x), k \in \mathbb{R}$.
- d) (E) possède une solution qui se prolonge par continuité en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$.

Question 20 : Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Si on note la population donnée par Ω , et on la munit de la mesure uniforme P . On note M l'ensemble des personnes malades, et T l'ensemble des personnes dont le test est positif. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

- a) $P(M|T) = 0,99$.
- b) $P(M|T) = \frac{1}{2}$.
- c) $P(M|T) = \frac{2}{3}$.
- d) Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer

النموذج التالي للتحضير

نموذج مباراة توظيف مهندسي الدولة بالاقتصاد والمالية 2024

Modèle de concours : Ingénieurs d'État – Ministère de
l'Économie et des Finances 2024

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/687

Chaîne WhatsApp

قناة واتساب

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

www.wadifa-info.com/wa

Le site

الموقع

كل المباريات المفتوحة والنماذج مع التصحيح، مجاناً

Tous les concours ouverts et les sujets corrigés, gratuits

www.wadifa-info.com