

**CONCOURS D'ACCES EN 1^{ère} ANNEE
POUR LES TITULAIRES DU
DEUG EN SCIENCES OU EQUIVALENT
EDITION 2017**

E H T P

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée 3h

Jeudi 06 Juillet 2017

Exercice 1 :

Pour $b \in \mathbb{R}$, on pose :

$$S_n(b) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^b}, \quad S_0(b) = 0.$$

1) Pour quels $b \in \mathbb{R}$ la suite $(S_n(b))_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Pour $a > 0$, on pose $u_n(a, b) := a^{S_n(b)}$.

2) Discuter suivant les valeurs de a et b la convergence de la suite $(u_n(a, b))_{n \in \mathbb{N}}$.

3) Montrer que si $b \geq 0$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(k+1)^b} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^b} \leq \frac{1}{k^b}.$$

4) En déduire que si $b \geq 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n(b) - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t^b} \leq S_n(b) - \frac{1}{n^b},$$

et que $S_n(b) = \int_1^n \frac{dt}{t^b} + O(1)$ quand $n \rightarrow \infty$.

5) Si $\alpha_n = O(1)$, montrer que $\exists m, M > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} : m \leq e^{\alpha_n} \leq M$.

6) Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante sur $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ pour que la série $\sum_{n \geq 0} u_n(a, b)$ converge.

Exercice 2 :

Soit E un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ stable par dérivation, i.e. $\forall f \in E, f' \in E$.

1) Montrer que $E \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

2) On pose $D : E \rightarrow E$
 $f \mapsto f'$

Montrer que D est bien définie et que $D \in \mathcal{L}(E)$.

3) Montrer que $\exists P \in \mathbb{K}_n[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(D) = 0$.

4) Montrer que E est exactement l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre $n = \dim(E)$.

Exercice 3 :

1) Montrer que si A et B sont des matrices carrées d'ordre n , alors :
 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

2) Soit E un K -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille de vecteurs propres de u dont les valeurs propres associées sont deux à deux distinctes.
Montrer que $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

3) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto e^{\alpha x}$$

Montrer que $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

4) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $g_\alpha :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto x^\alpha$$

Montrer que $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Problème :

L'objectif de ce problème sera l'étude des $\mathbb{R}$ -algèbres unitaires commutatives intégrales de dimension finie.

- 1) Donner un exemple de $\mathbb{R}$ -algèbre unitaire commutative intégrale de dimension finie.
- 2) L'algèbre donnée dans la réponse précédente est-elle un corps ?
- 3) Donner un exemple de $\mathbb{R}$ -algèbre unitaire commutative intégrale qui ne soit pas un corps. Est-elle de dimension finie ?
- 4) Donner un exemple d'un sur-corps commutatif de $\mathbb{R}$ de dimension finie et un autre de dimension infinie.

On rappelle que K est un sur-corps de K_0 s'il existe un morphisme de corps injectif $\phi : K_0 \rightarrow K$. Dans ce cas, on confond K_0 et $\phi(K_0)$ pour écrire $K_0 \subset K$.

Soit $(A, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{R}$ -algèbre unitaire commutative intégrale de dimension finie.

5) Pour $x \in A$, en étudiant la famille $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer qu'il existe un polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) = 0$.

On rappelle que si $Q(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_d X^d \in \mathbb{R}[X]$, et $a \in A$,
 $Q(a) := \alpha_0 1_A + \alpha_1 a + \dots + \alpha_d a^d$.

Pour $x \in A$, on pose $I_x := \{P \in \mathbb{R}[X] : P(x) = 0\}$,

et $N_x := \{\deg(P) : P \in I_x \setminus \{0\}\}$.

6) Montrer que $\forall x \in A$, I_x est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ non réduit à $\{0\}$.

7) Pour $x \in \mathcal{A}$, montrer que N_x admet toujours un minorant noté d_x , et que $d_x \in \mathbb{N}^*$.

8) Montrer que $\forall x \in \mathcal{A}, \exists \pi_x \in I_x$ unitaire tel que $\deg(\pi_x) = d_x$.

9) Montrer que $I_x = \pi_x \mathbb{R}[X] = \{\pi_x P : P \in \mathbb{R}[X]\}$.

10) Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?

11) En factorisant π_x comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, déduire à partir de l'équation $\pi_x(x) = 0$ que $d_x \in \{1, 2\}$.

12) Montrer que $\forall x \in \mathcal{A} : d_x = 1$ ssi $x \in \text{vect}(1_{\mathcal{A}})$, et donner l'expression de π_y pour $y = \lambda 1_{\mathcal{A}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

13) Montrer que $x \in \mathcal{A} \setminus \text{vect}(1_{\mathcal{A}})$ ssi $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$ et $\pi_x(X) = X^2 + aX + b$.

14) Pour quels $x \in \mathcal{A}$, $\pi_x(0) = 0$? En déduire que tout élément non nul de $\mathcal{A}$ admet un inverse dans $\mathcal{A}$. Que peut-on déduire concernant la structure $(\mathcal{A}, +, \times)$?

15) Pour B anneau commutatif intègre, on note $J_B := \{x \in B : x^2 + 1_B = 0\}$. Quelles sont les valeurs possibles du cardinal de J_B ? Donner des exemples d'anneaux B pour chaque valeur.

16) Si $\dim(\mathcal{A}) = 1$, quel est le cardinal de $J_{\mathcal{A}}$? Dans ce cas, à quelle algèbre usuelle $\mathcal{A}$ est-elle isomorphe ?

Dans la suite, nous supposons que $\dim(\mathcal{A}) \geq 2$.

17) En étudiant la forme canonique de π_a pour un $a \in \mathcal{A} \setminus \text{vect}(1_{\mathcal{A}})$, montrez qu'il existe $j \in \mathcal{A}$ tel que $j^2 = -1_{\mathcal{A}}$.

En déduire que $J_{\mathcal{A}} = \{j, -j\}$.

18) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{A} \setminus \text{vect}(1_{\mathcal{A}})$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x = a1_{\mathcal{A}} + bj$.

Indication : utiliser les questions 13) et 17).

19) Dédurre que $\mathcal{A} = \text{vect}(1_{\mathcal{A}}, j)$. Conclure en répertoriant, à isomorphisme près, toutes les $\mathbb{R}$ -algèbres unitaires intègres commutatives de dimension finie.

Soit K un sur-corps de $\mathbb{R}$. On écrit par abus $\mathbb{R} \subset K$.

20) Vérifier que $(K, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre, où le produit externe $\lambda \cdot x := \lambda \times x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in K$.

21) Quels sont, à isomorphisme près, tous les sur-corps commutatifs de $\mathbb{R}$ de dimension finie ?

22) Donner un exemple de sur-corps de $\mathbb{R}$ de dimension n finie, avec $n \geq 3$.

*** Fin de l'épreuve ***

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer

النموذج التالي للتحضير

نموذج مباراة توظيف مهندسي الدولة بالاقتصاد والمالية 2024

Modèle de concours : Ingénieurs d'État – Ministère de
l'Économie et des Finances 2024

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/687

Chaîne WhatsApp

قناة واتساب

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

www.wadifa-info.com/wa

Le site

الموقع

كل المباريات المفتوحة والنماذج مع التصحيح، مجاناً

Tous les concours ouverts et les sujets corrigés, gratuits

www.wadifa-info.com