



Université Mohammed V de Rabat

Ecole Nationale Supérieure d'Informatique et d'Analyse des Systèmes

ENISA

Concours DEUG 2017-18
Epreuve de Mathématiques

Jeudi 13/7/2017 à 9h00

Durée 3h

Problème : Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $] -1, 1[$.
On considère l'équation différentielle :

$$(1 - x^2) y' - xy = f(x) \quad (\varepsilon_f) \quad (1)$$

où f désigne une fonction réelle de classe C^∞ sur I ; on rappelle qu'une solution φ de cette équation est une fonction dérivable sur I telle que : $\forall x \in I, (1 - x^2) \varphi'(x) - x\varphi(x) = f(x)$.

Partie I

On considère la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \alpha_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^i du.$$

1. Etablir une relation de récurrence entre α_i et α_{i+2} pour tout entier naturel i .
2. En déduire que :

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \frac{(i-1)(i-3)\dots 1}{i(i-2)\dots 2} & \text{si } i \text{ est pair et non nul.} \end{cases}$$

Partie II

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$; justifier qu'il existe une et une seule solution φ de (ε_f) , définie sur I et telle que $\varphi(0) = y_0$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.
2. Montrer que toutes les solutions de (ε_f) sont de classe C^∞ sur I .
3. (a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée :

$$(1 - x^2) y' - xy = 0 \quad (\varepsilon_0) \quad (2)$$

- (b) Etant donné un réel y_0 , démontrer que l'unique solution φ de l'équation différentielle (ε_f) telle que $\varphi(0) = y_0$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\forall x \in I, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + y_0 \right).$$

- (c) Dans le cas particulier où l'équation différentielle est :

$$(1 - x^2) y' - xy = 1 \quad (\varepsilon_1) \quad (3)$$

déterminer les solutions sur I .

Partie III

On considère maintenant que f est définie par une série entière de rayon de convergence $R > 1$:

$$\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$

1. (a) Montrer que les solutions de (ε_f) sur $] -1, 1[$ sont développables en série entière, avec un rayon de convergence au moins égal à 1.
- (b) Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ l'une de ces solutions ;
i. Exprimer, pour $k \geq 1$, a_{k+1} en fonction de a_{k-1} et b_k .

- ii. En déduire, pour $k \geq 1$, une relation vérifiée par $\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}$, $\frac{a_{2(k-1)}}{a_{2(k-1)-1}}$ et $\frac{b_{2k-1}}{(2k-1)a_{2(k-1)-1}}$ (on utilisera la question 1. de la Partie I).
- iii. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, a_{2p} sous forme de sommes dépendant de a_0 , des a_{2k} et des b_{2k-1} avec $1 \leq k \leq p$.
- iv. De même, déduire de la question (i) ci-dessus, pour $k \geq 1$, une relation vérifiée par $(2k+1)a_{2k+1}a_{2k}$, $(2k-1)a_{2k-1}a_{2(k-1)}$ et $b_{2k}a_{2k}$.
- v. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, a_{2p+1} sous forme de sommes dépendant des a_{2k} et des b_{2k} , avec $1 \leq k \leq p$.

2. Dans tout ce qui suit, φ désigne la fonction définie, pour tout $x \in]-1, 1[$, par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

- (a) Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
- (b) Montrer que φ est une solution de (ε_f) sur $]-1, 1[$.
- (c) On veut démontrer que $\varphi(x)$ admet $-f(1)$ pour limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.
 - i. Soit $x \in]-1, 1[$ et soit $\theta \in]0, \pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$. Démontrer que :

$$\varphi(x) = \frac{-1}{\sin(\theta)} \int_0^\theta f(\cos(u)) du.$$

- ii. Soit F la fonction définie par :

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[\quad F(\theta) = \int_0^\theta f(\cos(u)) du.$$

Justifier la dérivabilité de F sur $]-\pi, \pi[$ et déterminer sa fonction dérivée F' . On énoncera avec précision le théorème utilisé.

- iii. Conclure.

Exercice : Recherche d'une racine réelle x du polynôme P .

On considère deux nombres réels a et b ($a < b$) tels que $P(a)P(b) \leq 0$.

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par $(a_0) = a$, $(b_0) = b$, puis par :

- $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ si $P(a_n)P(\frac{1}{2}(a_n + b_n)) \leq 0$.
- $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = b_n$ si $P(a_n)P(\frac{1}{2}(a_n + b_n)) > 0$.

1. Etablir que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
2. Etablir, pour tout entier naturel n , qu'on a $P(a_n)P(b_n) \leq 0$.
En déduire que la limite commune x des suites (a_n) et (b_n) est racine de P .
3. Ecrire un algorithme permettant d'obtenir un encadrement de x d'amplitude $h \leq \frac{b-a}{2^n}$.

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer

النموذج التالي للتحضير

**نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي -
المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -
الاختبار 1: تحليل موضوع عام**

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale –
École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre
2016 – épreuve 1 : dissertation sur un sujet d'ordre général

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp

قناة واتساب

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

www.wadifa-info.com/wa

Le site

الموقع

كل المباريات المفتوحة والنماذج مع التصحيح، مجاناً

Tous les concours ouverts et les sujets corrigés, gratuits

www.wadifa-info.com