

Concours DUT - ENSIAS - 2023-2024

Épreuve de Mathématique

Durée 2H 30

Cet examen est composé de 3 parties.

Partie I :

On considère la fonction d'une variable réelle $f : x \rightarrow x \int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt$

I.A-I.A.1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

I.A.2) Etudier les variations de f sur cet ensemble.

I.A.3) Après avoir minorée $f(x)$ sur l'intervalle $]1,0]$ déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

I.A.4) Etudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$ de la courbe représentant f .

I.B Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ les réels $x_k = \frac{k}{n}$, on pose

$$y_k = \frac{k}{n} \left(\frac{1}{2n} + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n+i} \right) + \frac{e^{\frac{k}{n}}}{2(n+k)} \right)$$

Montrer que y_k est une approximation de $f(x_k)$, en utilisant la méthode des trapèzes.

I.C I.C.1) Montrer qu'il existe une suite réelle $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k + o(x^n) \text{ au voisinage de } 0.$$

I.C.2) Calculer ce développement limité pour $n = 5$

I.C.3) Pour $n \geq 2$, exprimer λ_n en fonction de n

I.C.4) Etablir que pour $n \geq 1$, une expression de λ_{n+1} en fonction de n et λ_n

Partie II :

On considère l'équation différentielle : $(1+x)y' = xy$

On note φ la solution de cette équation sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifiant $\varphi(0) = 1$

II.A II.A.1) Justifier (sans calcul) l'existence et l'unicité de φ

II.A.2) Calculer explicitement $\varphi(x)$.

II.B Pour montrer que φ est développable en série entière au voisinage de 0, on suppose d'abord qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un intervalle ouvert I contenant 0 tels

que : $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in I$.

II.B.1) Montrer à l'aide l'équation différentielle $(1+x)y' = xy$ que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$a_0 = 1, a_1 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad na_n + (n+1)a_{n+1} - a_{n-1} = 0$$

II.B.2) A partir de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on pose $b_n = a_n + a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Démontrer que b_n vérifie la relation $b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$

II.B.3) En déduire, sous forme d'une somme, une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \geq 2$

II.B.4) Si la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est celle définie en I.C.1), démontrer la relation :

$$\lambda_n = \frac{a_{n-2}}{n-1} \quad \text{pour tout } n \geq 2$$

II.C-On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n+1)u_{n+1} + nu_n - u_{n-1} = 0$$

II.C.1) Montrer que E , muni des opérations usuelles sur les suites réelles, forme un espace vectoriel réel.

II.C.2) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.

II.C.3) Déterminer l'ensemble des suites géométriques contenues dans E .

II.C.4) En utilisant la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de II.B.1), déterminer une base de E et en déduire pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E une expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et n .

Partie III :

On note l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $IR_n[X]$ et $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ sa base canonique.

Etant donné une famille de $(n+1)$ réels distincts $a_0 < a_1 < a_2 \dots \dots \dots < a_n$ on lui associe les polynômes $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ de $IR_n[X]$ tels que

$$\begin{cases} \forall j \in [0, n] - \{i\}, L_i(a_j) = 0 \\ L_i(a_i) = 1. \end{cases}$$

1) On prend $n = 2, a_0 = 0, a_2 = 2, a_1 = 1$

Donner L_0, L_1, L_2 ,

Montrer que (L_0, L_1, L_2) est une base de $IR_2[X]$

Quelles sont les composantes d'un polynôme P de $IR_2[X]$ dans la base (L_0, L_1, L_2) ?

2) Former la matrice de changement de base de $B = (1, X, X^2)$ à $B' = (L_0, L_1, L_2)$

3) Déterminer les polynômes P de $IR_2[X]$ tels que $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$

Bonne chance

Partie III :

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x(x+1)y'' - x(x^2 + 2x + 2)y' + (x^2 + 2x + 2)y = 0 \quad (E)$$

III.A- III.A.1) Montrer que, si l'équation (E) admet des solutions polynomiales non nulle elles ne peuvent être que de degré 1.

III.A.2) Déterminer toutes les solutions polynomiales de (E) (Indication : (méthode de variation de la constante).

III.B- A l'aide d'une des solutions trouvées au III.A.2), montrer que la résolution de (E), sur $\mathbb{R}^*$ se ramène à la résolution de l'équation différentielle :

$$(1+x)y' = xy$$

étudiée dans la Partie II. En déduire le rapport avec la Partie I.

Bonne chance !

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer

النموذج التالي للتحضير

**نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي -
المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -
الاختبار 1: تحليل موضوع عام**

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale –
École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre
2016 – épreuve 1 : dissertation sur un sujet d'ordre général

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp

قناة واتساب

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

www.wadifa-info.com/wa

Le site

الموقع

كل المباريات المفتوحة والنماذج مع التصحيح، مجاناً

Tous les concours ouverts et les sujets corrigés, gratuits

www.wadifa-info.com