



Université Mohammed V – Souissi
Ecole Nationale Supérieure d'Informatique et
d'Analyse des Systèmes



Concours DEUG 2013-14

Epreuve de Mathématique

Durée : 2h00

ENSIAS, le 17 juillet 2014

Exercice 1

On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

- On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente.
En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{tA} = e^{2t}e^{t(A-2I_2)}$, valable pour tout réel t , donner l'expression de la matrice e^{tA} .
- En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Problème

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

- Justifier, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, l'existence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ et donner sa valeur.
- On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Démontrer que pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\Gamma(n)$.

- X 3. Démontrer la formule de Taylor avec reste de Laplace (ou reste intégral) :
- si I est un intervalle contenant le réel a , si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I , alors pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier naturel n , on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Partie II

Rappel :

ON RAPPELLE LE THEOREME SUIVANT :

Si une fonction f admet un développement en série entière sur l'intervalle $]-a, a[$, alors :

- la fonction f est de classe C^∞ sur $]-a, a[$,
- son développement en série entière est unique et est donné par la série de Taylor de la fonction f à l'origine :

$$\text{pour tout réel } x \in]-a, a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x \neq 0, f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. Expliciter une fonction f de classe C^∞ sur un voisinage de 0 et vérifiant, pour tout entier naturel n , l'égalité $f^{(n)}(0) = n \cdot n!$

6. Un théorème des moments

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 1$:

$$\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

On suppose, que pour tout entier naturel n , $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$.

L'objectif de cette question est de montrer que f est identiquement nulle sur $]-R, R[$.

- (a) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.

- (b) A l'aide du calcul de $\int_0^1 (f(x))^2 dx$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$.

- (c) Démontrer que f est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R, R[$.

Fin de l'épreuve

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer

النموذج التالي للتحضير

**نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي -
المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -
الاختبار 1: تحليل موضوع عام**

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale –
École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre
2016 – épreuve 1 : dissertation sur un sujet d'ordre général

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp

قناة واتساب

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

www.wadifa-info.com/wa

Le site

الموقع

كل المباريات المفتوحة والنماذج مع التصحيح، مجاناً

Tous les concours ouverts et les sujets corrigés, gratuits

www.wadifa-info.com