

CONCOURS D'ACCÈS À L'ENSIA
POUR LES CANDIDATS TITULAIRES DU DEUG

Epreuve de Mathématique

Durée 2 heures

Partie 1 :

On appelle θ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 2π , définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta(x) = \frac{\pi^2}{4} - x^2 \\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \theta(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

✓ 1.1. Tracer les graphes des fonctions θ et θ_1 , dérivée de la fonction θ .

1.2. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction θ_1 .

Etudier sa convergence.

Partie 2 :

Ce problème consiste à chercher les fonctions U de classe C^0 sur $\Omega = [0, \pi] \times \mathbb{R}_+$ et C^2 sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$, et vérifiant les conditions suivantes :

$$(P) \quad \begin{cases} \forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) & (1) \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad U(0, t) = U(\pi, t) = 0 & (2) \\ \forall x \in [0, \pi], \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} U(x, t) = 0 & (3) \\ \forall x \in [0, \pi], \quad U(x, 0) = \Phi(x) & (4) \end{cases}$$

Une fonction U vérifiant les quatre relations (1), (2), (3) et (4) est dite solution du problème (P).

On se propose de chercher des solutions de l'équation différentielle (1) sous la forme de fonctions V définies sur Ω par :

$$\forall (x, t) \in \Omega, \quad V(x, t) = g(x) \cdot h(t)$$

où g est une fonction réelle de classe C^2 sur $[0, \pi]$ et h une fonction réelle de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

Question 1.

✓ 1.1. Montrer que si les fonctions g et h sont solutions des équations différentielles :

$$\begin{cases} g''(x) - \mu g(x) = 0 \\ h'(t) - \mu h(t) = 0 \end{cases}$$

où μ est un réel quelconque, alors la fonction $V : (x, t) \rightarrow V(x, t) = g(x) \cdot h(t)$ vérifie (1).

✓ 1.2. Trouver toutes les solutions des équations différentielles précédentes.

✓ 1.3. On prend $\mu = -k^2, k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une suite de fonctions $(V_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$:

$$V_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \mapsto V_k(x, t) = g_k(x) \cdot h_k(t)$$

vérifiant (1), (2) et (3).

Question 2.

Soit : $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, t) \mapsto H(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \sin(kx) e^{-k^2 t}$$

et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, t) \mapsto R_k(x, t) = \sin(kx) e^{-k^2 t}.$$

Il s'agit de déterminer les coefficients $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ pour que la fonction H soit solution du problème (P).

2.1. A l'aide de la relation (4), déterminer les coefficients $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

✓ 2.2. Montrer qu'alors, la fonction H est deux fois dérivable par rapport à x et une fois par rapport à t avec :

$$\forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial x^2}(x, t)$$

$$\text{et } \forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial R_k}{\partial t}(x, t).$$

Question 3.

✓ Trouver une solution au problème (P).

Bonne chance !

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer

النموذج التالي للتحضير

**نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي -
المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -
الاختبار 1: تحليل موضوع عام**

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale –
École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre
2016 – épreuve 1 : dissertation sur un sujet d'ordre général

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp

قناة واتساب

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

www.wadifa-info.com/wa

Le site

الموقع

كل المباريات المفتوحة والنماذج مع التصحيح، مجاناً

Tous les concours ouverts et les sujets corrigés, gratuits

www.wadifa-info.com