

-Epreuve d'ALGEBRE-

14 Juillet 2018

-EXERCICE-

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n ($n \geq 2$) à coefficients réels, de la forme :

$$M(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ \beta & & & \alpha \end{pmatrix}; \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- 1) Montrer qu'il existe dans $\mathcal{A}$ deux matrices I et J ne dépendant ni de α ni de β telles que l'on ait : $M(\alpha, \beta) = \alpha I + \beta J$; $((\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
- 2) Déterminer les éléments inversibles de $\mathcal{A}$.

-PROBLÈME-

Soit n un entier naturel non nul et E l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X , à coefficients réels, de degré strictement inférieur à n .

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels distincts deux à deux ; on pose

$$H(X) = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n).$$

- 1) Calculer $H'(x_i)$; ($1 \leq i \leq n$) et les polynômes

$$E_i(X) = \frac{1}{H'(x_i)} \frac{H(X)}{(X - x_i)}; \quad (1 \leq i \leq n)$$

- 2) Calculer $E_j(x_i)$; ($1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n$); en déduire que les polynômes $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont linéairement indépendants et qu'ils forment une base de E .
- 3) a) Montrer que l'application φ_i ($1 \leq i \leq n$) de E dans $\mathbb{R}$, définie en posant pour chaque élément P de E , $\varphi_i(P) = P(x_i)$ est une forme linéaire.
b) Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est la base du dual E^* de E , duale de la base $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ de E .

- c) En déduire le résultat suivant : étant donnés n nombres réels $y_1, y_2, \dots, y_n$, il existe un polynôme P de E et un seul, tel que $P(x_i) = y_i$ pour $1 \leq i \leq n$.
- 4) Soit f une fonction définie continue sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On considère l'application g de E dans $\mathbb{R}$, définie en posant pour chaque élément P de E ,

$$g(P) = \int_a^b f(t)P(t)dt.$$

Montrer que g est une forme linéaire; donner ses coordonnées sur la base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ de E^* , sous formes d'intégrales définies.

- 5) Soient $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ des nombres réels tels que $b_1 < b_2 < \dots < b_n < b_{n+1}$. Pour chaque entier i compris entre 1 et n on définit une application Ψ_i de E dans $\mathbb{R}$ en posant pour chaque élément P de E ,

$$\Psi_i(P) = \int_{b_i}^{b_{i+1}} P(t)dt.$$

Montrer que Ψ_i ($1 \leq i \leq n$) est une forme linéaire. Démontrer qu'il existe n polynômes $F_1, F_2, \dots, F_n$ de E tels que :

$$\Psi_i(F_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

En déduire que $(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$ est une base de E^* .

- 6) Exprimer (sous forme d'intégrales définies et en fonction des E_i et des F_j ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$)) les coordonnées des formes Ψ_i ($1 \leq i \leq n$) sur la base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ et les coordonnées des formes φ_i ($1 \leq i \leq n$) sur la base $(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$.

- 7) Trouver la base duale de la base de E formée par les n polynômes:

$$1, X, X^2, \dots, X^{n-1}.$$