

Concours : Cycle Ingénieur
Epreuve d'Analyse (Durée : 1 h 30 min)

Exercice 1 : [A] Distinguer le vrai du faux (justifier votre réponse). Soit (u_n) une suite réelle.

- a)- Si $\lim u_n = 1$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$.
b)- Si $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim (u_{n+1} - u_n) = 0$.
c)- Si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0, alors (u_n) possède une limite finie.

[B] (i)- Montrer que pour tout entier $n \geq 0$: $\frac{1}{n^2 + 1} \leq \arctg(n+1) - \arctg n \leq \frac{1}{n^2 + 1}$

(ii)- On pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n^2 + 1}$. Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$S_{n+1} - 1 \leq \arctg(n+1) \leq S_n.$$

En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ a une limite S qui vérifie : $\frac{\pi}{2} \leq S \leq 1 + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 : a)- En effectuant le $DL_2(0)$ de : $f(x) = \text{Log} \left[\frac{e^{x + \cos x} - e}{x + x^2} \right]$, montrer que f se

prolonge par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en zéro.

b)- Soit a un nombre réel. Trouver une fonction simple équivalente en $+\infty$ à la fonction f définie par $f(x) = \frac{a+x}{1-ax} - \sqrt{x}$.

Exercice 3 : (i) Soit a et b deux réels. Donner le $DL_n(0)$ de $f(x) = \log \frac{1+ax}{1+bx}$.

(ii) Soit f la fonction définie, lorsque cela a un sens, par : $f(x) = (3x^2 + 6x - 10) \text{Log} \frac{x+4}{x+2}$.

Montrer qu'elle admet un développement asymptotique lorsque x tend vers l'infini, de la

forme $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ où α, β et γ sont des réels non nuls.

En déduire le comportement de la courbe représentative de f à $+\infty$ et à $-\infty$. (Asymptote, position par rapport à l'asymptote et dessin).

Exercice 4 : Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$. a- Montrer que I est convergente.

b- Pour $\varepsilon > 0$, établir, en posant $x = 2t$, la relation : $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

c- En déduire la valeur de I .

Bonne Chance