

Cycle Ingénieur : Statistique et Informatique Décisionnelles

Concours : Epreuve d'Algèbre

(Durée : 1h 30min)

Exercice 1 :

Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y = 1\} \text{ et } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + y = 0\}$$

A et B sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? Justifier. Dans le cas affirmatif, donner leur base.

Exercice 2 :

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels engendrés par $\{(1, 1), (1, -1)\}$ et $\{(0, 1), (1, 1)\}$ respectivement. Calculer la matrice de l'application P définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $P(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ dans les bases A et B .

Exercice 3 :

a) Soit $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que :

$$\text{Ker}(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 = 3x_3 \text{ et } x_2 = -x_4\}$$

Déterminer une base de $\text{Ker}(T)$ et montrer que T est surjective.

b) Soit $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) / x_1 = x_2 \text{ et } x_3 = 2x_4 = 2x_5\}$. Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\text{Ker}(T) = U$.

Exercice 4 :

m désigne un nombre réel, on considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

- Déterminer les valeurs propres de la matrice A_m et les vecteurs propres associés. Montrer que A_m est diagonalisable.
- Discuter, suivant les valeurs de m , le rang de A_m . Déterminer l'inverse de A_m lorsqu'il existe.
- Dans le cas où A_m n'est pas inversible, déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme associé.

Bonne chance.