

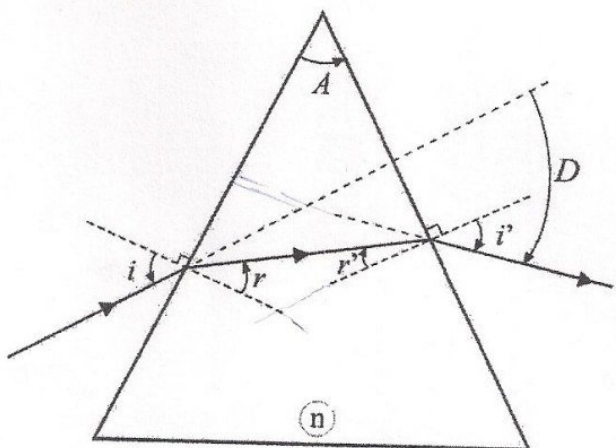
# CONCOURS D'ENTREE 2011/2012

## Epreuve de Physique

3 heures

### Problème 1 Étude d'un prisme

On considère un prisme d'angle  $A = 60^\circ$  constitué d'un verre d'indice  $n$ . On appelle déviation (notée  $D$ ) l'angle entre le rayon transmis par le prisme et le rayon incident.



#### A Étude de la déviation d'un rayon lumineux

A.1 Rappeler, en précisant bien ce que sont les différentes grandeurs sur un schéma, les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et pour la réfraction.

A.2 On notera  $i$  et  $i'$  les angles d'incidence à l'entrée et à la sortie du prisme, ainsi que  $r$  et  $r'$  les angles des rayons réfractés à l'intérieur du prisme respectivement côté entrée et côté sortie.

La convention de signe est trigonométrique pour  $A$ ,  $i$ , et  $r$ , et horaire pour  $i'$ ,  $r'$  et  $D$ .

A.3 Quelles sont, pour un rayon incident situé dans le plan perpendiculaire à l'arête du prisme, les relations entre angles d'incidence et angles de réfraction ? Montrer que  $A = r + r'$ .

A.4 Établir la relation :  $D = i + i' - A$ .

Pour une valeur donnée de l'indice  $n$ , la déviation  $D$  est en fait seulement fonction de  $i$ . Lorsque  $i$  varie, la déviation  $D$  présente une valeur minimale, notée  $D_m$  dans la suite.

A.5 Montrer qu'au minimum de déviation les angles  $i$  et  $i'$  sont égaux.

A.6 Établir la relation  $n \sin(\frac{A}{2}) = \sin(\frac{D_m + A}{2})$ . En déduire une méthode expérimentale pour mesurer l'indice d'un matériau.

#### B Influence de la longueur d'onde

Le prisme est fabriqué dans un matériau dont l'indice est donné en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide (exprimée en nanomètre) dans le tableau suivant.

| $\lambda$ (nm) | 404,6 | 435,8 | 486,1 | 508,6 | 546,1 | 578,0 | 643,8 | 706,5 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $n$            | 1,590 | 1,581 | 1,572 | 1,568 | 1,564 | 1,561 | 1,556 | 1,552 |

B.1 Loi de variation de l'indice avec la longueur d'onde En utilisant les couples de valeurs  $(n, \lambda)$  du tableau ci-dessus, montrer que l'indice  $n$  du matériau peut se mettre sous la forme :  $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$ . Calculer les valeurs de  $a$  et  $b$  pour  $\lambda$  exprimée en nanomètre.

**B.2** Le minimum de déviation défini à la question A.6 varie-t-il fonction de la longueur d'onde ?

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que l'on éclaire le prisme avec un angle d'incidence  $i$  égal à la valeur, notée  $i_0$ , correspondant au minimum de déviation pour une valeur de la longueur d'onde dans le vide égale à  $\lambda_0 = 578,0 \text{ nm}$ .

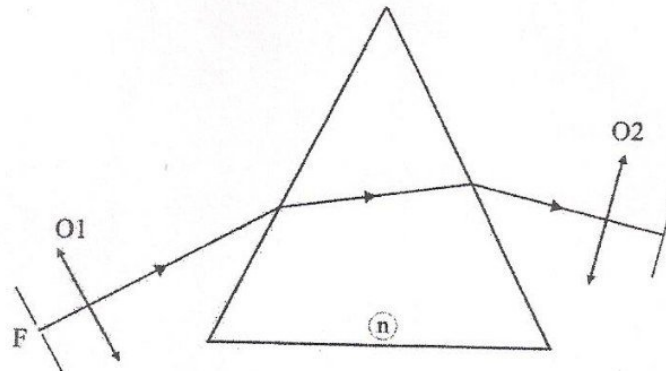
**B.3** Calculer numériquement cet angle  $i_0$ .

**B.4** Montrer que dans ces conditions, la dispersion angulaire  $\frac{di'}{d\lambda}$  obéit à la relation :  $\frac{di'}{d\lambda} = 2 \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos i_0} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$  ; pour cela on pourra différentier les différentes relations obtenues aux questions A.3 et A.4, l'angle d'incidence étant constant et égal à  $i_0$ .

### B.5 Montage d'étude

Le prisme est placé dans le montage représenté ci-dessous. Ce montage comprend :

- un collimateur composé d'un objectif convergent  $O1$  assimilable à une lentille mince convergente de distance focale image  $f'$  et d'une fente  $F$  perpendiculaire au plan de la figure, de largeur  $l$ , et centrée au foyer objet de  $O1$ .
- un objectif  $O2$  identique à  $O1$ , dans le plan focal image duquel on peut donc observer le spectre de la source qui éclaire la fente  $F$ .



**B.5.1** Expliquer le principe de fonctionnement du montage.

**B.5.2** On éclaire la fente  $F$  par une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 578,0 \text{ nm}$  ; l'axe du collimateur fait avec la normale à la face d'entrée du prisme l'angle  $i_0$  calculé à la question B.3.

Déterminer la position du centre de l'image de la fente  $F$  par l'ensemble du dispositif.

Sachant que  $\frac{di'}{di} = -1$  lorsque le prisme est réglé au minimum de déviation, déterminer, en fonction de la largeur  $l$  de la fente source  $F$ , la largeur de cette image, toujours lorsque  $\lambda = 578,0 \text{ nm}$ .

Dans la suite, on considérera, pour simplifier, que cette largeur ne dépend pas de la longueur d'onde.

**B.5.3** La source éclairant la fente  $F$  contient maintenant deux longueurs d'onde voisines,  $\lambda_1 = 577,0 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 579,0 \text{ nm}$ . Le prisme étant réglé au minimum de déviation pour la longueur d'onde  $\lambda_0 = 578,0 \text{ nm}$ , déterminer et calculer les positions des centres des images de  $F$  correspondant à ces deux longueurs d'onde ; on utilisera la relation  $\frac{di'}{d\lambda} = \frac{2 \sin(\frac{A}{2})}{\cos i_0} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$ .

La fente  $F$  ayant une largeur de  $1000 \text{ nm}$ , comment doit-on choisir la focale image  $f'$  de  $O1$  et de  $O2$  pour que les deux images soient juste séparées ?

Application numérique : calculer la valeur limite de la focale  $f'$ .

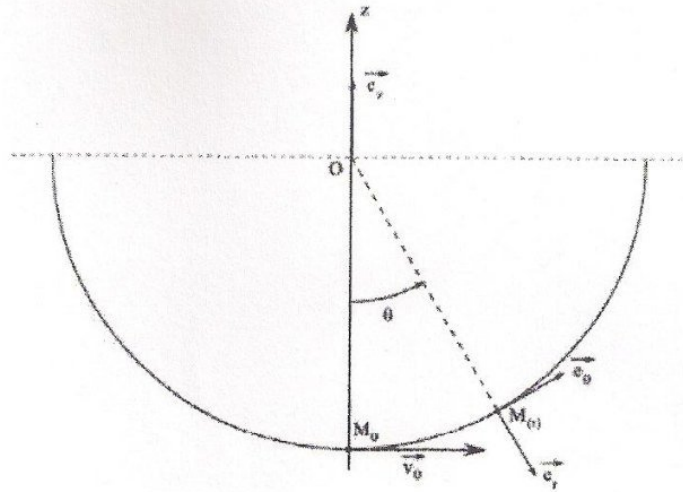
**B.5.4** La source éclairant la fente  $F$  est maintenant une source de lumière blanche. Qu'observe-t-on sur l'écran ? On précisera bien la répartition des différentes longueurs d'ondes.

**B.5.5** Ce montage permet la visualisation des spectres ; quel autre montage peut-on utiliser ?

## Problème 2 Mouvement d'un point sur un rail circulaire

Un petit objet assimilé à un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , peut glisser sans frottement le long d'un rail ayant la forme d'un demi-cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ , placé dans un plan vertical.

Le rail est supposé fixe par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  galiléen.



On repère la position du point  $M$  à l'instant  $t$  par l'angle  $\theta(t) = \widehat{OM_0, OM(t)}$ . À l'instant  $t = 0$ , l'objet est lancé du point  $M_0$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$ .

Dans tout le problème, on utilisera une base de projection polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ .

On prendra pour valeur de l'accélération de la pesanteur  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

### A Les frottements sont négligés

**A.1** Faire l'inventaire des forces appliquées à  $M$ , et les représenter sur un schéma clair lorsque le point est dans une position  $M(t)$  quelconque. On précisera les composantes de ces forces sur la base polaire.

**A.2** En utilisant une méthode énergétique, en déduire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction  $\theta(t)$ .

**A.3** On suppose que la norme  $v_0$  du vecteur vitesse initial est suffisamment faible pour que la condition  $\theta(t) \ll 1 \text{ rad}$  soit satisfaite à chaque instant. Déterminer complètement l'expression de  $\theta(t)$  dans cette hypothèse en fonction de  $v_0$ ,  $g$ ,  $R$  et  $t$ .

### B Influence des frottements de l'air

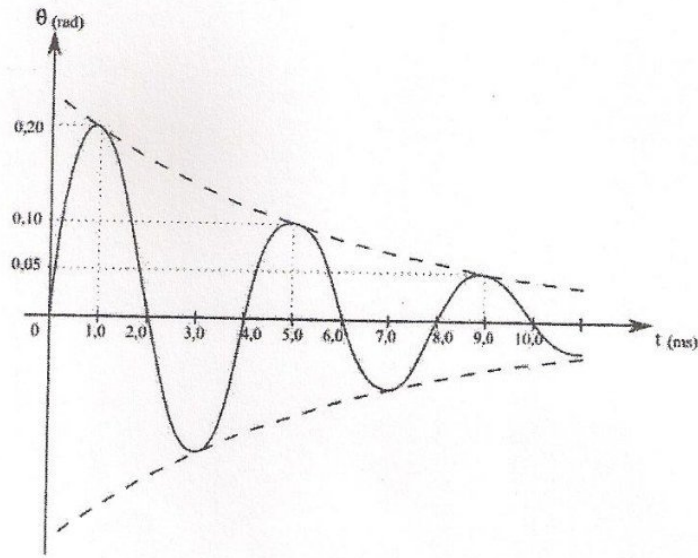
On suppose à partir de maintenant que le point  $M$  subit au cours de son mouvement une force de frottements fluide  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ , où  $\alpha$  est une constante positive et  $\vec{v}$ , le vecteur vitesse du point  $M$  à l'instant  $t$ . La condition  $\theta(t) \ll 1 \text{ rad}$  reste également satisfaite à chaque instant.

**B.1** En utilisant une méthode énergétique, établir la nouvelle équation différentielle satisfaite par la fonction  $\theta(t)$ .

**B.2** Les grandeurs  $m$ ,  $g$  et  $R$  étant fixées, donner la condition portant sur  $\alpha$  pour que le mouvement soit pseudo-périodique.

**B.3** On suppose la condition précédente réalisée. Exprimer  $\theta(t)$  sous la forme  $\theta(t) = A \exp -\frac{t}{\tau} \sin \Omega t$ . On justifiera soigneusement l'établissement de cette relation et on exprimera  $A$ ,  $\tau$  et  $\Omega$  en fonction de  $v_0$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $R$  et  $\alpha$ .

B.4 L'allure de la courbe représentative des variations de la fonction  $\theta(t)$  est donnée ci-dessous.



On appelle décrément logarithmique la grandeur sans dimension  $\delta = \ln \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}$  où  $T$  désigne la pseudo-période. Exprimer  $\alpha$  en fonction de  $\delta$ ,  $m$  et  $T$ . Par lecture graphique, déterminer les valeurs de  $T$  et  $\delta$ . En déduire celle de  $\alpha$  (sans omettre de préciser son unité), sachant que  $m = 100 \text{ g}$ .

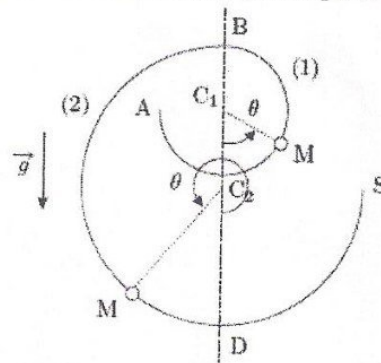
### Problème 3 Équilibre métastable

On dit qu'un système est en équilibre métastable lorsqu'étant dans un état d'équilibre stable, il est susceptible d'évoluer vers un autre état d'équilibre plus stable sous l'effet d'une petite perturbation.

On considère un anneau de masse  $m$ , assimilable à un point matériel  $M$ , qui se déplace sur une piste fixe formée de deux parties circulaires :

- la partie (1) allant de  $A$  à  $B$ , de rayon  $R_1$  et de centre  $C_1$ ,
- la partie (2) allant de  $B$  à  $S$ , de rayon  $R_2 > R_1$  et de centre  $C_2$ .

Les centres  $C_1$  et  $C_2$  sont situés sur la même verticale. L'ensemble de la piste est placé dans un plan vertical.



Sur la partie (1), on repère le mouvement du point matériel par l'angle  $\theta$  que fait le vecteur  $\overrightarrow{C_1M}$  avec la verticale descendante. Sur la partie (1)  $\theta$  varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  (position en  $A$ ) et  $\pi$  (position en  $B$ ). Sur la partie (2)  $\theta$  varie entre  $\pi$  et  $5\frac{\pi}{2}$  (position en  $S$ ).

Le glissement de l'anneau a lieu sans frottement. Le référentiel d'étude est supposé galiléen et le champ de pesanteur a pour intensité  $g$ .

#### A Étude énergétique

A.1 Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur  $E_p$  de l'anneau  $M$  en fonction des constantes  $m$ ,  $g$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et de la variable  $\theta$  en prenant  $E_p = 0$  au point  $B$  et en distinguant les cas  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  (anneau sur la partie (1)) et  $\pi < \theta < 5\frac{\pi}{2}$  (anneau sur la partie (2)).

A.2 Tracer l'allure de la courbe  $E_p(\theta)$ .

A.3 Quelles sont les positions d'équilibres de l'anneau ? Préciser leur stabilité.

## B Réponse à une perturbation

L'anneau  $M$  étant initialement sur la partie (1) au point  $E$  défini par  $\theta = 0$ , il subit une petite perturbation dont on admet qu'elle équivaut à le lancer sur la piste avec une vitesse  $\vec{v}_0$  horizontale.

B.1 À quelle condition sur  $v_0$ ,  $g$  et  $R_1$ , l'anneau peut-il atteindre le point  $B$ ? Que se passe-t-il si cette condition n'est pas satisfaite?

B.2 Cette condition étant remplie, exprimer la vitesse  $v_D$  de passage en  $D$  en fonction des données.

B.3 Quelle doit être la vitesse minimale au point  $D$  pour que l'anneau sorte de la piste en  $S$ ? Conclure.

## C Petites oscillations autour de la position d'équilibre

On considère dans cette partie que la vitesse  $v_0$  est insuffisante pour que l'anneau puisse atteindre la partie (2). Le point matériel oscille donc autour de sa position d'équilibre stable. On supposera l'amplitude des oscillations faibles pour que l'on puisse considérer que  $\sin \theta \approx \theta$ .

C.1 Énoncer et démontrer le théorème de l'énergie cinétique.

C.2 Déterminer l'équation différentielle du mouvement à partir d'une approche énergétique.

C.3 Retrouver cette équation différentielle à partir d'une autre méthode.

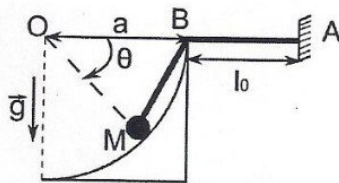
C.4 Exprimer la période des oscillations en fonction de  $g$  et  $R_1$ .

C.5 Sachant que  $\theta(0) = 0$  et  $v(t = 0) = v_0$ , déterminer l'expression de  $\theta(t)$ .

## Exercice 1 Petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable

Petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable

On considère un élastique de masse négligeable de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  ainsi qu'une particule  $M$  de masse  $m$ . On réalise un quart de circonférence de centre  $O$  et de rayon  $a$ . L'élastique est accroché en  $A$ , passe par  $B$  dans un petit anneau ( $AB = l_0$ ). La particule  $M$  coulisse sans frottement sur le cercle. On note  $g$  l'accélération de pesanteur.



1. Chercher la position d'équilibre stable (on notera  $\alpha$  la valeur de l'angle  $\theta$  à l'équilibre stable).
2. Établir l'équation différentielle du mouvement de  $M$ .
3. Calculer  $\alpha$  dans le cas où  $a = \frac{mg}{k}$ , et calculer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable. On posera  $\theta(t) = \alpha + \epsilon(t)$  avec  $\epsilon \ll 1$ . On admet alors que  $\cos \epsilon = 1$  et  $\sin \epsilon = \epsilon$ .