

CONCOURS D'ENTRÉE 2011/2012

Épreuve de Mathématique

3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème 1

Partie A : Etude d'une intégrale

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$$

1. Calculer I_0 .
2. Calculer $I_0 + I_1$. En déduire I_1 .
3. a) Quel est le signe de I_n ?

b) Montrer que : $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$

c) En déduire que : $I_n \leq \frac{1}{2n+2}$

d) Montrer que la suite (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Partie B : Etude d'une série

1. a) Montrer par récurrence que :
pour tout entier naturel n non nul,

$$2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$$

- b) En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et donner sa somme.
2. a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx$$

b) Etablir les inégalités :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{1}{2n+4}$$

c) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ puis un équivalent de I_n .

Partie C : calcul des intégrales $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$

- a) A l'aide d'un changement de variable $t = x^2$, prouver que : $I_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$
- b) En déduire que : $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^n \ln 2$ pour tout n non nul.
- c) Application : calculer $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x} dx$.

Problème 2

Partie A :

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de A ?
2. Calculer $\det(A)$. A est-elle inversible ? Donner A^{-1} dans le cas échéant.
3. Montrer que A admet une seule valeur propre a . Expliquer pourquoi A n'est pas diagonalisable.

Partie B :

Soit f l'endomorphisme associé canoniquement à A .

On pose :

$$u_1 = f(e_1)$$

$$u_2 = (f - aI)(u_1)$$

$$u_3 = 2e_1 + e_3$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Montrer que (u_2, u_3) est une base de E_a .
3. Donner la matrice B de f dans la base (u_1, u_2, u_3) .
4. Exprimer A en fonction de B et la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3) .
5. Calculer B^k et en déduire A^k .

Application :

Soient $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites de nombre complexe définies par :

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 1, z_0 = 0 \\ x_{n+1} = -2x_n + 5y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = -x_n + 4y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 2x_n - 10y_n - 5z_n \end{cases}$$

Trouver les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et n .