

Durée : 1h 30

Note :

- Toute réponse non justifiée aura une note nulle.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Soit une fonction continue f , sur l'intervalle unité fermé $[0, 1]$ et qui s'annule aux extrémités. On dira que $c > 0$ est une **corde** de f s'il existe un nombre x tel que x et $x + c$ soient tous deux dans $[0, 1]$ et tel que : $f(x) = f(x + c)$. Un nombre est appelé **corde universelle** s'il est une corde pour toute fonction continue sur $[0, 1]$ et telle que $f(0) = f(1) = 0$. Par exemple, $c = 1$ est une corde universelle. Montrer que si c est une corde universelle, elle est forcément de la forme $\frac{1}{n}$ avec n entier naturel positif.

Indication :

Considérer la somme télescopique

$$(f(\frac{1}{n}) - f(\frac{0}{n})) + (f(\frac{2}{n}) - f(\frac{1}{n})) + (f(\frac{3}{n}) - f(\frac{2}{n})) + \dots + (f(\frac{n}{n}) - f(\frac{n-1}{n})) = f(1) - f(0) = 0$$

puis utiliser la fonction $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$, où f est la fonction vérifiant les hypothèses ci-dessus.

Exercice 2

2.1. Soient A une partie de l'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de A et f une fonction uniformément continue sur A à dans valeur dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

2.2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle uniformément continue sur $]a, b[$. Montrer qu'on peut prolonger par continuité la fonction f sur $[a, b]$.

Indication : Montrer que la limite de l'image, par f , d'une suite qui converge vers a ne dépend pas du choix de cette suite. Conclure.

Exercice 3

Montrer que la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$; $f(0) = 1$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.