



13/07/2016

Epreuve de Mathématiques 2

Durée : 1 Heure 30 minutes

Exercice 1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A . Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
4. Calculer $(A - 2I_3)^2$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 L'espace $E = \mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Soit f l'endomorphisme de matrice M dans cette base.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la matrice de $g = f^2$ dans la base $\mathcal{B}$?
2. Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de g ?
3. Montrer que si λ est une valeur propre de f , alors $\mu = \lambda^2$ est valeur propre de g .
4. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f .
5. pour un vecteur u quelconque de E , montrer que :

$$f(u) + 2u \in \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$$

$$f(u) - 2u \in \text{Ker}(f + 2\text{id}_E)$$

6. Construire un système de générateurs de E formé de vecteurs propres de f .
7. Diagonaliser f , soit directement, soit en utilisant ce qui précède.

Exercice 3 On considère les formes quadratiques suivantes :

$$\Phi_1(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

$$\Phi_2(x, y) = 3(x + y)^2 - 4(x - y)^2 - 13xy$$

$$\Phi_3(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi_1 + \alpha\Phi_2 = 0$
2. Déterminer les signatures des formes Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 .
3. Les formes Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 sont-elles définies positives ?