

Epreuve d'Algèbre
Concours d'entrée en première année IMIAE

Pour une matrice A de l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$, on note $C(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}), AM = MA\}$ le commutant de la matrice A .

1. Démontrer que pour $A \in M_3(\mathbb{R})$, $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $u \in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canonique associé à A
 - (a) Calculer le polynôme caractéristique de A et les sous-espaces propres associés à A .
 - (b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$.
 - (c) Montrer que $\text{Ker}(u - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$ est stable par u .
 - (d) Soit v l'endomorphisme de $\text{Ker}(u - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$ induit par u sur $\text{Ker}(u - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$ défini par :

$$\begin{array}{ccc} v : & \text{Ker}(u - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 & \longrightarrow & \text{Ker}(u - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Déterminer une base de $\text{Ker}(u - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$ relativement à laquelle la matrice de v est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (e) en déduire que A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour cela, on donnera une matrice inversible P de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T$.

3. Déterminer le commutant $C(T)$ de la matrice T . Déterminer sa dimension.
4. Démontrer que l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un endomorphisme bijectif d'espaces vectoriels de $M_3(\mathbb{R})$. Que peut-on déduire pour la dimension de $C(A)$?
5. (a) Existe-t-il un polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2 ?
 (b) Démontrer alors que $C(A) = \text{vect}\{I_3, A, A^2\}$.
 (c) En déduire que $C(A)$ est l'ensemble des polynômes en A .
 Ce résultat reste-t-il vrai pour une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$?

Pour un entier non nul n , on désigne par :

- S_n l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$,
- S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$.

On admet que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n réels positifs, alors on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

On rappelle qu'une matrice S appartient à S_n^+ , si S appartient à S_n et si, pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXSX \geq 0$

6. Démontrer qu'une matrice S de S_n est un élément de S_n^+ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives.

7. Soit $S \in S_n^+$. Démontrer que

$$\sqrt[n]{\det(S)} \leq \frac{1}{n} \text{trace}(S)$$

8. Application : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$,

(a) Démontrer que ${}^tMM \in S_n^+$.

(b) Si $M = (m_{ij})$, en déduire l'inégalité

$$(\det M)^2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^2\right)^n$$