

Concours d'accès aux filières d'ingénieurs
 Epreuve de Mathématiques

Exercice 1:

I) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}AP$.

2) Déterminer une matrice B telle que $A = B^t B$, où B^t est la matrice transposée de B .

II) Dans toute cette partie E désigne un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie. On note n sa dimension et on suppose que $n \geq 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble d'endomorphismes sur E .

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, pour tout entier naturel p non nul, on note $f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}$. On

pose $f^0 = Id$ où Id est l'application identité de E .

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on note par $P(f)$ l'application linéaire définie par:

$$\forall q \in \mathbb{N}, P(f) = \sum_{k=0}^q a_k f^k \text{ où } P(X) = \sum_{k=0}^q a_k X^k.$$

On notera $\deg(P)$ le degré du polynôme P .

Dans toute la suite on considère $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant la relation:

$$(f - Id) \circ (f - 2Id)^2 = 0$$

on pose $E_1 = \text{Ker}(f - Id)$ et $E_2 = \text{Ker}(f - 2Id)^2$.

On suppose que $\dim E_1 \geq 1$ et $\dim E_2 \geq 1$.

1) Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.

2) Montrer qu'il existe deux polynômes U et V tels que:

$$(X - 1)U(X) + (X - 2)^2 V(X) = 1, \text{ avec } \deg(U) < 2 \text{ et } \deg(V) < 1$$

3) On note p_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et p_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 . Montrer que:

$$p_1 = V(f) \circ (f - 2Id)^2 \text{ et } p_2 = U(f) \circ (f - Id).$$

Exercice 2:
 Dans toute la suite $I =]-1, 1[$. On considère l'équation différentielle suivante:

$$(E_f) \quad (1-x^2) \frac{dy}{dx} - xy = f(x)$$

où f est une fonction de classe C^∞ sur I .

On dira que φ est une solution de (E_f) sur I si et seulement si φ est dérivable

sur I et on a $\forall x \in I, (1-x^2) \frac{d\varphi}{dx}(x) - x\varphi(x) = f(x)$.

1) Vérifier que $\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}, x \in I$ est solution de l'équation (E_0) dite homogène (c'est à dire dans le cas où $f = 0$) où $C \in \mathbb{R}$.

2) Vérifier que $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + a_0 \right), x \in I$ est l'unique solution de (E_f) qui satisfait $\varphi(0) = a_0$.

3) Déterminer $\varphi(x)$ dans la cas particulier où $f(x) = 1, \forall x \in I$.

4) Dans toute la suite on désigne par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ pour $x \in I$.

a) Justifier l'existence de $\varphi(x) \forall x \in I$.

b) On veut montrer que $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \varphi(x) = -f(1)$:

b1) soit $x \in I$, et soit $\theta \in]0, \pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$. Montrer que

$$\varphi(x) = \frac{-1}{\sin(\theta)} \int_0^\theta f(\cos(u)) du$$

b2) Soit F la fonction définie sur $]0, \pi[$ par $F(\theta) = \int_0^\theta f(\cos(u)) du$. Justifier que F est dérivable sur $]0, \pi[$ et déterminer sa fonction dérivée $F'(\theta)$.

b3) conclure.

5) On considère maintenant le cas où $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}, x \in I$ et

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

a) Expliciter $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in I$,

$$\varphi_n(x) = -\frac{x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} \varphi_{n-2}(x).$$

c) Montrer que pour tout $n \geq 0, \varphi_{2n+1}$ est un polynôme de degré $2n$.

d) Montrer que pour tout $n \geq 0, \varphi_{2n}(x) = P_n(x) + c_n \varphi_0(x)$, où P_n est un polynôme de degré $2n-1$ et $c_n \in \mathbb{R}$.