

Concours d'accès aux filières d'ingénieurs
IGC ISET IRISI et IAFCS

Partie I

Exercice : On définit les fonctions φ et F sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x \sin(t) \arctan(t) dt, \quad F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \sin(t) \arctan(t) dt$$

- 1) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et préciser sa dérivée sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- 2) Exprimer à l'aide de F les solutions sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation différentielle :

$$xy' + y = \sin(x) \arctan(x)$$

- 3) Montrer que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\varphi(x) \leq x \sin(x) \arctan(x)$$

- 4) En déduire la monotonie de F sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- 5) Montrer que :

$$\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad 0 \leq \arctan(t) \leq t \text{ et } 0 \leq \sin(t) \leq t$$

- 6) En déduire : $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$.

Partie II

Exercice 1 Soit

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \geq 4, 0 \leq y \leq x \text{ et } 0 \leq x \leq 2\};$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \geq 4, y \geq x \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 2\}.$$

1° Représenter graphiquement les domaines D_1 et D_2 .

2° Calculer l'aire de D_1 en utilisant les coordonnées polaires.

3° Calculer $I = \iint_{\Delta} |x - y| dx dy$

$$\text{où } \Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \geq 4, 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 2\}.$$

Exercice 2 1) Déterminer la nature (convergence ou divergence) des séries suivantes :

$$(a) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n)}}$$

2) Pour quelle valeur de a la série de terme général $(1 - a)^n$ est-elle convergente ? calculer sa somme.

3) Calculer la somme de la série : $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!}$

Partie III

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$.

1) a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ définie par :

$u_1 = e_1 - e_2, u_2 = e_2 - e_3, u_3 = e_1 + e_2 + e_3$, est une base de E ;

b) Déterminer $\text{Mat}(f, \mathcal{B})$ et $\text{Mat}(f, \mathcal{B}')$, où f est l'endomorphisme de E défini par :

$f(u_1) = f(u_2) = 0$ et $f(u_3) = u_3$.

2) Etant donné l'endomorphisme g de E défini par :

$$\text{Mat}(g, \mathcal{B}) = M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer l'image de g , le rang de g . Expliciter une base de l'image de g .

b) Déterminer le noyau de g . Expliciter une base du noyau de g .

c) Vérifier que $E = \text{Im } g \oplus \ker g$.

3)

a) Montrer qu'il est possible de choisir deux vecteurs v_1 et v_2 dans E vérifiant :

$g(v_1) = 5v_1, g(v_2) = -3v_2$.

b) Vérifier que $\mathcal{A} = (v_1, v_2, u_3)$ est une base de E ; déterminer $\text{Mat}(g, \mathcal{A})$;

c) Dédurre de 3), b) le calcul de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.