

ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics



Concours d'Accès en 1^{ère} Année

Réservé aux Titulaires du DEUG

- Epreuve de Mathématiques
- Durée : 3h

Lundi 21 Juillet 2008

Les calculatrices sont autorisées.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre

Problème

Autour des fonctions Γ et ψ d'Euler

Un des objectifs du problème qui comporte trois paragraphes est de démontrer la formule correspondante suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)}{2\alpha}$$

où $\alpha \in]0, 1[$ et ψ est une fonction « d'Euler » que l'on définira ultérieurement.

Dans le paragraphe I, on définit la fonction Gamma d'Euler et on en montre quelques propriétés que l'on utilisera dans le paragraphe II pour définir la fonction ψ d'Euler et démontrer la formule ci-dessus.

Enfin, dans le paragraphe III, on étudie plus en détail la fonction Gamma, dans le but de la représenter graphiquement.

Les paragraphes II et III sont indépendants mais utilisent des résultats du paragraphe I.

1. Questions préliminaires

a. Soit $\alpha \in]0, 1[$, justifier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$.

b. Pour quelle(s) valeur(s) de β l'intégrale $\int_0^1 t^\beta dt$ est-elle convergente ? On ne demande pas de justifier.

I. La fonction Gamma d'Euler

2. Soit x un réel strictement positif, justifier l'existence d'un réel A strictement positif, tel que pour tout réel t strictement supérieur à A , on ait $e^{-t} t^{x-1} < \frac{1}{t^2}$, puis montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \text{ est convergente.}$$

On peut donc définir sur $]0, +\infty[$, la fonction Gamma d'Euler notée Γ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

3. Calculer $\Gamma(1)$ puis montrer la relation fondamentale suivante notée $(\mathcal{F})$:

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (\mathcal{F}).$$

En déduire $\Gamma(2)$. Soit n un entier naturel non nul, donner une expression simple de $\Gamma(n)$.

4. Dérivabilité de la fonction Gamma

Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$.

a. Pour tout réel t strictement positif, on définit sur $]0, +\infty[$, la fonction h_t par $h_t(x) = t^{x-1}$.

Déterminer les variations de h_t . On pourra discuter selon la valeur de t .

En déduire que $\forall x \in [a, b], \forall t \in]0, +\infty[, 0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1}$.

b. Pour cette question, on pourra utiliser librement le résultat suivant : pour tout réel x strictement supérieur à -1 , l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x |\ln t| dt$ est convergente.

Montrer avec soin que la fonction Γ est dérivable sur $[a, b]$ et déterminer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

La fonction Γ est donc dérivable sur $]0, +\infty[$. On montre de la même façon et on admet que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

5. Soit p un entier naturel, écrire sans justifier $\Gamma^{(p)}(x)$ sous forme d'intégrale. ($\Gamma^{(p)}$ désigne la dérivée p -ième de Γ).

II. La fonction ψ d'Euler

On montre sans difficulté, que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x) > 0$. On peut donc définir sur $]0, +\infty[$, la fonction ψ d'Euler par $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

6. Relation entre ψ et des sommes.

a. Quelle relation différentielle relie ψ et $\ln \Gamma$? En déduire que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{on pourra utiliser } (\mathcal{F})).$$

b. Soit n un entier naturel non nul, déterminer en fonction de n et de α , quatre réels u_1, v_1, u_2, v_2 tels que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k-\alpha} = \psi(u_1) - \psi(v_1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+\alpha} = \psi(u_2) - \psi(v_2).$$

7. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R(X) = \frac{1}{X^2 - \alpha^2}$ puis en déduire que

l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} (\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)) + \frac{1}{2\alpha} (\psi(n+1-\alpha) - \psi(n+1+\alpha)).$$

8. Énoncer avec soin l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$, puis l'utiliser pour montrer que $(\Gamma'')^2 \leq \Gamma'' \times \Gamma''$ où Γ'' désigne la dérivée seconde de Γ . En déduire que la fonction ψ est croissante.

9. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a

$$0 \leq \psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1-\alpha) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \quad (\text{penser que } \alpha \in]0, 1[).$$

$$\text{Conclure que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)}{2\alpha}.$$

III. Étude de la fonction Gamma

10. Utiliser $(\mathcal{F})$ pour déterminer un équivalent de Γ au voisinage de 0_+ . En déduire la limite de Γ en 0 .

11. a. Justifier que Γ' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b. Justifier l'existence d'un réel $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. En déduire le signe de Γ' et enfin, les variations de Γ .

12. a. Déterminer la limite de Γ en $+\infty$. On pourra utiliser des résultats précédents.

b. Dessiner l'allure du graphe de Γ . On représentera, s'il y a lieu, les asymptotes et les tangentes horizontales.

Exercice 1 Etude d'un endomorphisme sur l'espace des polynômes

n désigne un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n .

On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application $f: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P(X)) = X(P(X) - P(X-1)).$$

13 Résultats préliminaires

- Calculer $f(1), f(X), f(X^2)$.
- Si $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$, avec $a_n \neq 0$, quel est le terme de plus haut degré du polynôme $P(X-1)$?
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(X) = P(X-1)$. On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$. Montrer que $Q(X)$ est un polynôme constant que l'on précisera.

14 Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

15 Déterminer le noyau de f , en déduire la dimension de l'image de f .

16 Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 2$.

- Quelle est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? Ecrire la matrice de l'endomorphisme f dans cette base canonique.
- L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

17 Etude de la diagonalisation dans le cas général

Pour tout entier naturel k , on définit les polynômes P_k par :

$$P_0(X) = 1, P_1(X) = X \text{ et pour tout } k \geq 2, P_k(X) = X(1-X)(2-X) \dots (k-1-X).$$

- Montrer que la famille $(P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Soit k un entier naturel, déterminer un nombre réel c_k tel que $f(P_k) = c_k P_k$.
- Déterminer les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 2 Résolution d'une équation différentielle

18. On note (E) l'équation différentielle $|x|y' + (x-1)y = x^2$.

- Résoudre (E) sur $]0; +\infty[$.
- Sachant que les solutions de (E) sur $]-\infty; 0[$ sont les fonctions $x \mapsto x + 2 + \frac{2}{x} + B \frac{e^x}{x}$, où $B \in \mathbb{R}$, existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$? Si oui, les expliciter.