

Concours Commun d'accès en 1^{ère} année
Session du 29 Juillet

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 2h15mn

Importants :

1. Aucune question n'est permise pendant l'épreuve.
2. Les calculatrices sont strictement interdites.

Partie I : Questions à choix multiples

Pour chaque question qui suit, cocher la bonne réponse dans la partie correspondante de la feuille des réponses.

(Une réponse correcte = 2pts, aucune réponse, plus d'une réponse ou une réponse fausse = 0pts)

- Question 1 :** On propose à un candidat un QCM de 30 questions. Pour chaque question, il y a 5 réponses possibles dont une seule est correcte. Quelle est la probabilité P pour que toutes ses réponses soient justes sachant qu'il va répondre au hasard à ce questionnaire ?
- Question 2 :** Soit $f(x) = x + \ln x$ une fonction strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On note g sa fonction réciproque qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est la valeur de $g'(x)$?
- Question 3 :** On pose $f(x) = (1+x)(1+2x) \dots (1+nx)$. Cocher la bonne Valeur de $f'(0)$.
- Question 4 :** Déterminer la limite de la suite de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $u_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
- Question 5 :** Soit u une racine 5^{ème} de l'unité et $u \neq 1$, calculer $1 + u + u^2 + u^3$.
- Question 6 :** Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+4i$, $2-i$ et $-3-5i$. Déterminer l'affixe z_D du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
- Question 7 :** Quel est le reste r de la division de $1^{17} + 2^{17} + 3^{17} + \dots + 15^{17}$ par 17 ?
- Question 8 :** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'entier $A_n = 1 + 5^n + 5^{2n} + 5^{3n}$. Déterminer la condition nécessaire et suffisante pour laquelle A_n est un multiple de 13.
- Question 9 :** On définit dans $\mathbb{R}^2$ la loi notée $*$ par : $\forall (x, y), (x', y') \in (\mathbb{R}^2)^2, (x, y) * (x', y') = (x + x', ye^{x'} + y'e^{-x})$.
- Question 10 :** Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. Cocher la bonne réponse.

- Question 11 :** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \int_0^1 \frac{dx}{t + \sin(x)}$. Cocher la bonne réponse.
- Question 12 :** Soit f la fonction définie par $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Cocher la bonne réponse.
- Question 13 :** Déterminer la limite $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}$.
- Question 14 :** Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $z = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$.
- Question 15 :** Calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_{-7}^7 (x^3 - 5x)^{13} dx$.

Partie II : Questions à réponses précises

Pour chaque question qui suit, écrire la réponse dans la partie correspondante de la feuille des réponses.

(Chaque réponse est notée sur 2pts)

- Question 16 :** On désigne par $[x]$ la partie entière de x . Calculer la valeur de $I = \lim_{x \rightarrow 0} ([x^2] - [x]^2)$.
- Question 17 :** Calculer la valeur de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$.
- Question 18 :** Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$. Déterminer dans $\mathbb{R}$ l'ensemble S des solutions de l'inéquation $f(x) \leq x$.
- Question 19 :** On note $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $v_n = \ln \left(\frac{n+2}{n+3} \right)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- Question 20 :** Écrire sous forme algébrique le complexe $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$.
- Question 21 :** Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t dt$.
- Question 22 :** Soit $z = x + iy$, x et y étant deux réels tels que $(x, y) \neq (1, 0)$. On pose $Z = \frac{z+2i}{z-1}$. L'ensemble E des points d'affixe z tel que Z soit un imaginaire pur est un cercle de centre C et de rayon r privé d'un point M . Déterminer les coordonnées des points C et M et la valeur du rayon r .
- Question 23 :** Déterminer l'ensemble P des primitives de la fonction $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.
- Question 24 :** Soit $P(z) = z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i$. Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet un imaginaire pur comme solution.
- Question 25 :** Calculer la limite $l = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}} \right)$.

Remarques importantes :

- L'épreuve est composée d'une seule page.
- Les réponses doivent être mentionnées sur la fiche de réponse donnée au candidat.
- Le candidat doit se concentrer sur le sujet d'examen sans poser aucune question concernant :

Electricité (QCM : Marquez la bonne réponse sur la fiche de réponse)

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

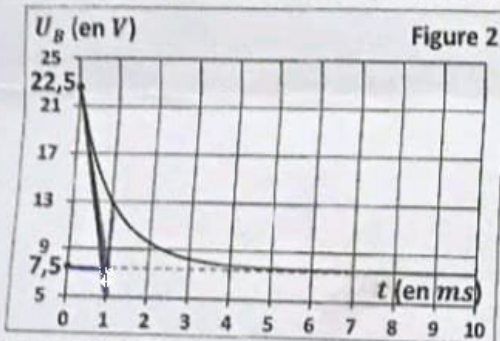
Exercice 1

On réalise un circuit électrique comportant un générateur de tension continu E , un interrupteur de courant K , une bobine d'inductance L et de résistance r , deux condensateurs initialement déchargés de même capacité C et deux conducteurs ohmiques de même résistance R (Figure 1).

A l'instant $t = 0$ s, on positionne l'interrupteur K en position 0. Le courant $i_1(t)$ traversant le circuit augmente de zéro à une valeur maximale notée $I_P = 500$ mA où le régime permanent est atteint.

1. L'expression de I_P en fonction de r , R et E est :

Un dispositif approprié permet de relever la tension U_B aux bornes de la bobine en fonction du temps comme le montre la courbe de la Figure 2.



- La tension U_B s'exprime en fonction de $i_1(t)$, R et E comme suit :
- A partir de l'équation de la question 2, et en utilisant la courbe de la Figure 2, La tension E (en V) fournie par le générateur a pour valeur :
- L'expression de U_B en fonction de $i_1(t)$, r et L est :
- A partir de l'équation de la question 4, et en utilisant la courbe de la Figure 2, la résistance r (en Ω) vaut :
- La résistance R (en Ω) d'un conducteur ohmique vaut :
- Sachant que le courant $i_1(t)$ s'exprime comme suit : $i_1(t) = I_P (1 - e^{-t/\tau})$, l'expression de τ est :
- La valeur de la tension U_R (en V) aux bornes des conducteurs ohmiques à $t = \tau$ est :
- La valeur de la tension U_B (en V) à $t = \tau$ est environ :
- En utilisant la courbe de la Figure 2, τ a pour valeur (en ms) :
- La valeur de l'inductance L (en mH) de la bobine est :
- A un instant t_1 , $U_B = U_R$. L'expression de t_1 est :
- La valeur de t_1 (en ms) est :

orsque le régime permanent du courant dans la bobine est atteint ($i_1 = I_P$), on bascule K de la position 0 à la position 1 à un instant $t_0 = 0$ considéré comme origine du temps.

ans un premier temps, on négligera la résistance r de la bobine.

4. L'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension U_C aux bornes des condensateurs en fonction du temps est la suivante : $\alpha \frac{d^2 U_C(t)}{dt^2} + U_C(t) = \beta$. L'expression du couple (α, β) est :

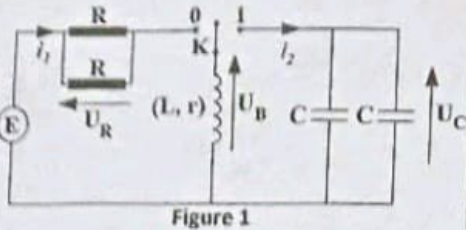


Figure 1

15. Sachant que la période propre T_0 des oscillations électriques vaut $T_0 = 1,33$ ms, la capacité C (en μF) des condensateurs vaut environ :

Dans les questions suivantes, on tiendra compte de la résistance r de la bobine. Un appareil adéquat permet de tracer la courbe de l'énergie totale E_t du circuit en fonction du temps t , ainsi que la tangente à cette courbe en $t_0 = 0$ (Figure 3).

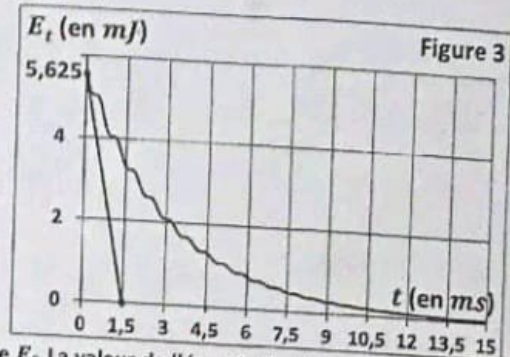


Figure 3

- On note E_0 La valeur de l'énergie E_t à l'instant $t_0 = 0$. L'inductance L s'exprime suivant la relation :
- La pente, notée p , de la tangente à la courbe en $t_0 = 0$ a pour valeur (en J/s) :
- L'expression de la résistance r de la bobine est :

Exercice 2

Une bobine d'inductance L et de résistance r est placée en série dans un circuit comprenant un condensateur de capacité $C = 390 \mu F$ et un générateur (GBF) délivrant une tension alternative sinusoïdale : $u_G = 30 \sin(100\pi t)$, u_G en V et t en s (Figure 4). Le circuit est alors traversé par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité : $i(t) = I_m \cos(100\pi t + \varphi)$, I_m en A et φ en rad. Un oscilloscope numérique connecté au circuit permet de visualiser sur la voie Y_A la tension $u_G = u_{AM}$ et sur la voie Y_B la tension $u_C = u_{BM}$ (Figure 5). Sur l'écran de l'oscilloscope, les oscillogrammes de la Figure 5 sont observés. On donne $\tau = 3,7$ ms.

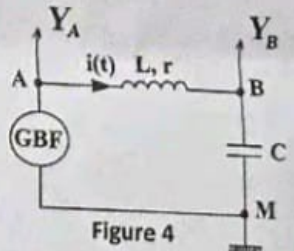


Figure 4

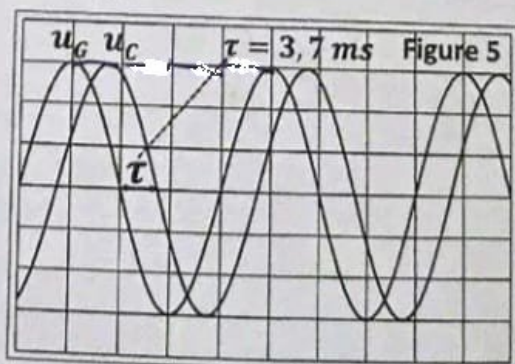


Figure 5

- Sachant que la sensibilité verticale S_V (en V/div) est la même pour les deux voies, S_V a pour valeur :
- La sensibilité horizontale S_H (en ms/div) de l'oscilloscope vaut :
- L'expression de la tension u_C en fonction du temps est (en V) :
- Le couple $(I_m; \varphi)$ a pour valeur (respectivement en A et en rad) :
- En appliquant la loi des mailles et en utilisant les expressions temporelles de u_G , $i(t)$ et $u_C(t)$ puis en attribuant au temps t deux valeurs particulières, le couple $(r; L)$ a pour valeur (respectivement en Ω et mH) :

On suppose que l'accélération de la pesanteur est constante et égale à $g = 10 \text{ m/s}^2$, dirigée vers le bas.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Rédaction : On écrit seulement le résultat final sur la fiche de réponse.

Partie A

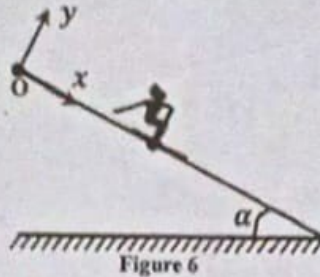
On étudie le mouvement d'un skieur, assimilé à un point matériel de masse m , descendant une piste selon la ligne de plus grande pente faisant l'angle α avec l'horizontale (Figure 6). A l'instant initial, le skieur part sans vitesse initiale du point O choisi comme origine de l'axe Ox confondu avec la piste. On note Oy la normale à la piste dirigée vers le haut. $\vec{i}$ et $\vec{j}$ désignent respectivement les vecteurs unitaires des axes (Ox) et (Oy). La réaction de la neige sur le skieur est notée : $\vec{R} = -T\vec{i} + N\vec{j}$ avec $T = \mu N$ où μ désigne le coefficient de frottement. On repère la position du skieur sur l'axe Ox par son abscisse $x(t)$. On néglige la résistance de l'air.

24. Exprimer N en fonction de α , g et m .

25. Exprimer l'accélération γ du skieur en fonction de α , g et μ .

26. Déterminer l'équation horaire $x(t)$ en fonction du temps t , α , g et μ .

27. Déterminer, en fonction de α , g , μ et l , la vitesse v du skieur quand il parcourt une distance l .



On reprend l'énoncé précédent mais en supposant que l'air exerce sur le skieur une force de frottement de la forme : $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ où λ est un coefficient constant positif et $\vec{v}$ est la vitesse du skieur.

28. En appliquant la deuxième loi de Newton, la vitesse v du skieur vérifie l'équation différentielle : $m\dot{v} + \lambda v - \beta = 0$. Exprimer β en fonction de m , α , g et μ .

On donne : $\lambda = 1 \text{ kg.s}^{-1}$; $\mu = 0,9$; $m = 80 \text{ kg}$ et $\alpha = 45^\circ$.

29. La piste est tellement longue qu'un régime permanent va s'établir. Déterminer la valeur numérique (en m/s) de la vitesse limite v_l .

30. La solution de l'équation de la question 28 s'écrit : $v(t) = v_l(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$. Exprimer τ en fonction de m et λ .

31. Sachant que $x(t=0) = 0$, déterminer l'équation horaire $x(t)$ en fonction de v_l , τ et t .

32. Déterminer en fonction de τ l'instant t_1 où la vitesse du skieur atteint $\frac{v_l}{2}$.

A l'instant t_1 , le skieur tombe. On suppose que le mouvement du skieur est toujours sur la ligne de plus grande pente. On néglige la résistance de l'air, et on considère que le coefficient de frottement sur le sol est multiplié par 10 ($\mu = 10 \times 0,9 = 9$). Déterminer les valeurs numériques de :

33. La distance d (en m) parcourue par le skieur avant de s'arrêter.

34. La durée Δt (en s) entre l'instant t_1 et l'instant d'arrêt t_2 .

35. Le travail W (en kJ) de la force de frottement entre t_1 et t_2 .

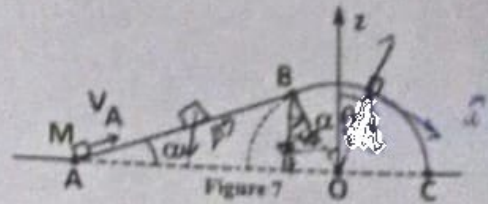
QCM : Marquez la bonne réponse sur la fiche de réponse.

Partie B

Un palet M de masse m , assimilé à un point matériel, est lancé sur une piste composée d'une portion rectiligne AB et inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, de rayon R et d'angle $\widehat{BOC} = \frac{\pi}{2} + \alpha$ (Figure 7). Le palet, initialement lancé depuis A avec la vitesse V_A , glisse sans frottement sur la piste.

36. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, l'expression de la vitesse V_B au point B est :

37. Afin que B soit effectivement atteint par l'objet, il est nécessaire que $V_A > V_{A1}$. L'expression de V_{A1} est :



Pour les questions suivantes, on suppose que la condition $V_A > V_{A1}$ est vérifiée.

38. L'expression de la durée τ de parcours du trajet AB est :

39. Lors de la phase du mouvement sur l'arc BC, on note θ l'angle entre OM et la verticale Oz (Figure 7). L'expression de la réaction normale R_n de la piste sur M est :

40. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, $\dot{\theta}^2$ s'écrit :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{V_A^2}{R^2} + \eta \frac{g}{R} \cos \theta. \text{ Le coefficient } \eta \text{ est :}$$

41. Pour que le palet M ne quitte pas la piste avant le sommet ($\theta = 0$), la vitesse V_A doit rester inférieure à un seuil V_{A0} . L'expression de V_{A0} est :

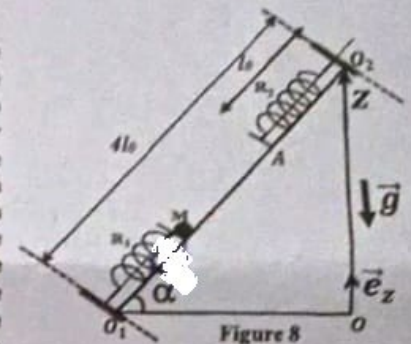
(Indication : l'intensité R_n doit rester positive pour maintenir le contact entre M et le cercle)

42. L'angle θ_A pour lequel le palet M quitte la piste vérifie : $\cos \theta_A = \frac{V_A^2}{gR}$.

Le coefficient β est :

Partie C

Une bille M assimilée à un point matériel de masse m , peut se déplacer sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (Figure 8). Elle est mise en mouvement à l'aide d'un ressort R_1 de constante de raideur k_1 de longueur à vide l_0 . En haut du plan incliné se trouve un autre ressort R_2 de constante de raideur k_2 et de même longueur à vide l_0 . On donne la longueur $O_1O_2 = 4l_0$. L'origine des énergies



potentielles de pesanteur est le plan horizontal passant par O_1 . Le point M peut être repéré soit par son abscisse z sur l'axe (Oz) soit par son abscisse $x = O_1M$ sur l'axe (O_1O_2) orienté de O_1 vers O_2 . On néglige les masses des ressorts ainsi que les frottements.

43. La longueur l_{eq} du ressort R_1 correspondant à l'équilibre de la bille est :

On déplace la bille d'une distance a telle que : $O_1M = a + l_{eq}$ puis on la lâche sans vitesse initiale. On suppose que la bille reste accrochée au ressort R_1 .

44. L'énergie potentielle totale de la bille (élastique et de pesanteur) est :

45. L'équation différentielle du mouvement de la bille s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - l_{eq}) = 0. \text{ La pulsation } \omega_0 \text{ est :}$$

46. L'équation horaire $x(t)$ s'écrit sous la forme : $x(t) = \lambda + \mu \cos(\omega_0 t)$. Le couple (λ, μ) est :

En réalité la bille n'est pas soudée au ressort R_1 . Au cours d'une expérience, on comprime l'ensemble (Bille + Ressort R_1) jusqu'à une longueur l_2 et on libère l'ensemble sans vitesse initiale. La bille monte alors jusqu'à un point B qu'elle atteint avec une vitesse nulle. Ce point B se situe entre O_2 et A tel que : $O_2B = \frac{l_0}{2}$ (le ressort R_2 est alors comprimé).

47. L'énergie mécanique de la bille exprimée au point B s'écrit : $E_m(B) = Ak_2 l_0^2 + Bmgl_0 \sin \alpha$. Le couple (A, B) est :

48. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, l'expression de la constante de raideur k_2 se met sous la forme :

$$k_2 = 4k_1(1 - C)^2 - \frac{8mgs \sin \alpha}{l_0} D. \text{ Le couple } (C, D) \text{ est :}$$