



CONCOURS D'ENTRÉE au cycle préparatoire au diplôme d'ingénieur UM6P-CS 2023

Durée de l'épreuve : deux heures (2h)

Calculatrices et smartphones interdits.

Nombre de pages de l'énoncé : 9.

RECOMMANDATIONS :

- L'épreuve est composée de 30 questions à choix multiples (QCM). Les questions sont **indépendantes**.
- Le choix de réponse est unique, cocher la bonne réponse. Une réponse correcte vaut **1 point**, une réponse fausse est sanctionnée par **-0.5 point** et une non-réponse vaut **0 point**.
- Certaines réponses ne demandent que des arguments de bon sens ; d'autres réponses exigent des calculs faits à part et qui n'ont pas à être reproduits. Du papier de brouillon est fourni pour ces calculs.
- Sur la feuille de réponses, vous devez mettre **une croix exactement à l'intérieur de la case**, sans dépasser les limites de la case pour la réponse que vous jugez exacte.
- Utilisez un stylo à bille NOIR ou BLEU. Le crayon à papier est totalement déconseillé.
- L'utilisation du BLANCO est hautement déconseillée.

1. La limite de la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \dots - \frac{1}{3^n}$.
- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. ∞

2. Toute suite convergente est
- A. croissante
- B. bornée
- C. décroissante
- D. non bornée

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ est égale à :
- A. e
- B. $+\infty$
- C. 1
- D. $-e$

4. Soit g la fonction définie par $\left\{ \begin{array}{l} g(x) = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - \frac{\ln(x)}{x+1} + 1, \text{ si } x \in]0, +\infty[\\ g(0) = \alpha \end{array} \right.$.

Pour quelle valeur de α la fonction g est continue?

- A. $\alpha = 0$
- B. $\alpha = 1$
- C. $\alpha = -1$
- D. $\alpha = \ln(2)$

5. Soit $v_n = \frac{n2^{2n} - 3^n}{n2^{2n} + 3^n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$

C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$

D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

6. Soit $u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

7. Déterminer Γ l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes z vérifient l'équation $\left| \frac{z-1}{1+iz} \right| = \sqrt{2}$:

A. le cercle de rayon 2 et de centre le point d'affixe $-1+2i$

B. une droite

C. un cercle unité

D. l'ensemble vide

8. L'ensemble des solutions de l'équation $(z^2+1)^2 + z^2 = 0$ pour $z \in \mathbb{C}$ est :

A. $\left\{ \pm \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right\}$

B. $\left\{ \pm \frac{1+\sqrt{3}}{2}i, \pm \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \right\}$

C. $\left\{ \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \pm \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$

D. $\left\{ \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}i, \pm \frac{1-\sqrt{5}}{2}i \right\}$

9. Soit $g(x) = \exp\left(\frac{\ln^2|x|}{\ln^2|x|+1}\right)$, alors :

A. g est une fonction croissante sur $]0, +\infty[$

B. g est une bijection de $]0, 1]$ dans $[1, e[$

C. g est une fonction impaire

D. g est décroissante sur $]0, +\infty[$

10. On appelle octet une liste de 8 éléments pris dans l'ensemble $\{0, 1\}$ (exemple d'octet : 00110011). Alors, il y a :

A. C_2^4 octets se terminant par 1000

B. 2^5 octets se terminant par 100

C. C_2^5 octets se terminant par 100

D. $(5!)(2^5)$ octets contenant 100

11. On considère la fonction f définie par $f(x) = \sin^2(x^2) \sqrt{x^2 + x + 1}$, alors :

A. $f'(0) = -1$

B.
$$f'(x) = \frac{\sin(x^2) \left(2x \sin(x^2) + 8x(x^2 + x + 1) \cos(x^2) \right)}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

C.
$$f'(x) = \frac{\sin(x^2) \left((2x + 1) \sin(x^2) + 8x(x^2 + x + 1) \sin(x^2) \right)}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

D.
$$f'(x) = \frac{\sin(x^2) \left((2x + 1) \sin(x^2) + 8x(x^2 + x + 1) \cos(x^2) \right)}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

12. On considère les deux intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \, dx$, alors :

A. $2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x \, dx$

B. $I + J = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $I = \frac{4 + \sqrt{2}}{12}$

D. $J = \frac{5\sqrt{2} - 8}{12}$

13. On a :

A. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \, dx = \frac{2\sqrt{2}}{11}$

B. $\int_{-2}^0 \left(|x+1| + \frac{4}{x-1} \right) dx = 1 - 4 \ln 3$

C. $\int_{-1}^1 x^2 e^{2x+1} dx = \frac{e^4 - 4}{4e}$

D. pour $k \in]1, 2[$, $\int_k^2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) dx = 2 \ln 2 - \ln(k-1)$

14. On considère l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$, alors :

A. $I = 0$

B. $I = \frac{\pi}{2}$

C. $I = \frac{16}{35} \pi$

D. $I = \frac{16}{35}$

15. On considère l'intégrale $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\cos(x)} - \sqrt{\sin(x)} \right) dx$, alors :

A. $I = \sqrt{2}$

B. $I = -\sqrt{2}$

C. $I = 1$

D. $I = 0$

16. On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2} dx$, alors :

A. $I = \sqrt{e}$

B. $I = \frac{8\sqrt{e}}{3} - 4$

C. $I = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

D. $I = \frac{\sqrt{2}}{3} - 4$

17. On considère $A = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{7}\right)$, alors :

A. $A = \frac{\pi}{4}$

B. $A = \frac{\pi}{2}$

C. $A = \frac{\pi}{3}$

D. $A = \frac{\pi}{8}$

18. On considère $T = \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$, alors :

A. $T = \frac{\pi}{4}$

B. $T = \frac{\pi}{2}$

C. $T = \pi$

D. $T = 2\pi$

19. On admet le résultat suivant : Soit A une matrice carré d'ordre 2 avec $A^2 = I$ où I est la matrice identité, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A + I)^n = 2^{n-1}(A + I)$. Soit maintenant

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

alors la valeur de B^n est :

A. $B^n = 2^n B$

B. $B^n = 2^{n-1} B$

C. $B^n = 2^{n-2}B$

D. $B^n = 2^{n+1}B$

20. La négation de la proposition suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y \implies f(x) > f(y)$ alors :

A. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y) \implies x \leq y$

B. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y) \text{ ou } x \leq y$

C. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y) \text{ et } x \leq y$

D. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y \text{ et } f(x) \leq f(y)$

21. La contraposé de la proposition suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y \implies f(x) \leq f(y)$, alors :

A. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y) \text{ ou } x \geq y$

B. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y) \text{ et } x \geq y$

C. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y) \implies x < y$

D. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \implies f(x) > f(y)$

22. on a :

A. $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 + 2n$ est divisible par 2

B. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

C. $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

D. $\forall n \in \mathbb{N}, 10^n - 1$ est divisible par 6

23. le prix d'un article a baissé trois fois de suite de 20%. Quel est le pourcentage du prix total de l'article?

A. 40%

B. 45.4%

C. 51.2%

D. 54.4%

24. Les solutions générales de l'équation différentielle $3y'' - 2y' - y = 4xe^{-x}$ sont :

A. $x \mapsto (x+2)e^{-x} + ae^{\frac{1}{3}x} + be^{-x}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$

B. $x \mapsto (x+2)e^{-x} + ae^{-\frac{1}{3}x} + be^x, (a, b) \in \mathbb{R}^2$

C. $x \mapsto (x+2)e^{-x} + ae^{\frac{1}{3}x} + be^x, (a, b) \in \mathbb{R}^2$

D. $x \mapsto (x+2)e^{-x} + ae^{-\frac{1}{3}x} + be^{-x}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$

25. Deux tireurs F et E tirent simultanément sur une cible. La probabilité que F touche la cible est $\frac{4}{5}$, la probabilité pour E est de $\frac{3}{4}$. La probabilité que la cible soit atteinte est :

A. $\frac{1}{20}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{19}{20}$

26. L'aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y = \frac{x^2}{2}$ et $y = \frac{1}{x^2+1}$ est :

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}$

D. $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}$

27. Soit $f(x) = (-1)^{E(x)}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

A. f est périodique de période 2

B. f est périodique de période 1

C. f est paire

D. f est impaire

28. Soit $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}, x \in]-1, +\infty[$. Déterminer f^{-1} .

A. $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x(2x + \sqrt{x^2 + 4})$

B. $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2(x + \sqrt{x^2 + 4})$

C. $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x(x + \sqrt{x^2 + 4})$

D. $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x(x + \sqrt{2x^2 + 4})$

29. Soit $g(x) = x\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right)$

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e$

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -e$

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\frac{e}{2}$

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{e}{2}$

30. Soit $u_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (k+n)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$

B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{e}$

C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{e}{4}$

D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{e}$

***** FIN DE L'ÉPREUVE *****