Concours d'Accès en Première Année

Epreuve de Mathématiques

11/07/2024 à 08h

Durée : 3 h

L'usage de calculatrices est interdit

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend quatre pages.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées).
- Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Le sujet comporte deux parties indépendantes.

PARTIE I

Notations

Pour tout nombre réel x tel que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\,dt$ converge, on note $g(x)$ la valeur de cette intégrale.

Pour tout entier naturel non nul n tel que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^n}{t^n}\,dt$ converge, on désigne par J_n sa valeur.

On désigne par ϕ (respectivement ψ) la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\phi(t) = t - 1 + \cos(t)$ (respectivement $\psi(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$).

I. Etude des fonctions ϕ et ψ.

1. Etudier la fonction ϕ, en déduire qu'il existe un nombre réel α tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t} \leq \alpha$.
2. Etudier la fonction ψ, en déduire qu'il existe un nombre réel β tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \beta$.

II. Existence de la fonction g sur $]0;+\infty[$.

1. Etablir la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$.
2. En déduire que $g(x)$ existe pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/350 - Wadifa Info - page 1/5

III. Limite de la fonction g en $+\infty$.

1. Préciser le signe de $g(x_1) - g(x_2)$ pour $0 \leq x_1 \leq x_2$. En déduire que la fonction g admet une limite finie λ en $+\infty$.
2. Déterminer la valeur de λ.

IV. Caractère C^k de la fonction g.

1. Montrer que la fonction g est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$.
3. Montrer que la fonction g' admet une limite finie (que l'on précisera) en $+\infty$.
4. Montrer que la fonction g est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$.
5. Expliciter $g''(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.
6. Expliciter $g'(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

V. Expression explicite de fonction $g(x)$.

1. Déterminer la limite de $x\ln(\frac{x^2}{x^2+1})$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Expliciter une primitive de la fonction : $x \mapsto \ln(x^2+1)$.
3. Expliciter $g(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.
4. Déterminer $g(0)$.

VI. Etude de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|^m}{t}dt$.

Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|^m}{t}dt$ pour tout entier naturel non nul m.

Pour tout entier relatif k tel que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{t^{4k}}{t}dt$ converge, on note I_k la valeur de cette intégrale.

VII. Etude de J_1.

Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $g(0)$.

VIII. Etude de l'existence de I_k.

Préciser la nature de l'intégrale généralisée I_k selon la valeur de l'entier relatif k.

IX. Etude de la nature de J_m.

Pour tout x appartenant à $[\frac{\pi}{2};+\infty[$ et tout entier relatif k, on note $I_k(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{t^{4k}}{t}dt$.

1. Exprimer, pour tout entier naturel non nul m et pour tout nombre réel x appartenant à $[\frac{\pi}{2};+\infty[$, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{|\sin(t)|^m}{t}dt$ à l'aide des intégrales $I_k(x)$.
2. En déduire l'existence de J_{2p+1} pour tout entier naturel p.
3. Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|^{2p}}{t}dt$ pour p entier naturel non nul ?

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/350 - Wadifa Info - page 2/5

PARTIE II

Notations

On désigne par R l'ensemble des nombres réels, par N l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N} - \{0\}$. Etant donné un entier naturel non nul n, on note $\{1, 2, \cdots, n\}$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leq k \leq n$.

Pour n entier naturel non nul, on note $M_n(\mathbb{R})$(respectivement $M_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients dans R.

Etant donné une matrice A, la notation $A = (a_{ij})$ signifie que a_{ij} est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.

On note I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire, telle que $I_n = (a_{ij})$ avec :

Pour tout i, $a_{ii} = 1$ et pour tout $i \neq j$, $a_{ij} = 0$.

On note J_n la matrice carrée de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et K_n la matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à la base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.

Soient n et r des nombres entiers tels que $2 \leq r \leq n-1$.

On dit qu'une matrice $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété (P) lorsqu'elle vérifie les quatre conditions suivantes :

1. M est symétrique.
2. Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $m_{ii} = 0$.
3. Chaque ligne de M comporte r coefficients égaux à 1 et $n - r$ coefficients égaux à 0.
4. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \cdots, n\} \times \{1, 2, \cdots, n\}$ avec $i \neq j$, le coefficient $m_{ij} = 0$, si et seulement si, il existe un entier $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que $m_{ik} = m_{jk} = 1$. L'entier k est alors unique.

On pourra utiliser une justification sur remarquer de la propriété (P) :

Si $m_{ij} = 1$, alors pour tout entier $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on a le produit $m_{ik} m_{jk} = 0$.

Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice M vérifie la propriété (P).

I. **Expression de M^2.** On note $M^2 = (a_{ij})$

1. Pour $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, calculer les coefficients a_{ii}.
2. Pour $(i, j) \in \{1, 2, \cdots, n\} \times \{1, 2, \cdots, n\}$ avec $i \neq j$, déterminer le coefficient a_{ij} selon la valeur de m_{ij}.
3. Montrer que $M^2 = J_n - M + dI_n$, où d est un nombre entier que l'on déterminera.

Dans la suite, on note f (respectivement ϕ) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, de matrice M (respectivement de matrice J_n), relativement à la base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note id l'endomorphisme identité

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/350 - Wadifa Info - page 3/5

de $\mathbb{R}^n$.

Soit v le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice colonne des coordonnées relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est K_v.

II. Relation entre n et σ.

1. Déterminer $Im(\phi)$, l'image de l'application linéaire ϕ.
2. Soit u un vecteur du noyau de $f - \sigma id$. En calculant $(fof)(u)$, montrer que u est colinéaire à v.
3. Montrer que σ est une valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre correspondant.
4. Déduire des questions précédentes, l'égalité $n = \sigma^2 + 1$.

III. Valeurs propres de f.

Dans la suite, λ est une valeur propre de f avec $\lambda \neq \sigma$ et $w = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

1. Justifier l'affirmation : Il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.
2. Justifier l'égalité $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Que vaut $\phi(w)$?
3. Montrer que λ est racine de l'équation $(E) : x^2 + x + 1 - \sigma = 0$.
4. On note a et b les deux racines de l'équation (E). On suppose qu'une seule de ces racines est valeur propre de f, par exemple a. En utilisant la trace de l'endomorphisme f, exprimer a en fonction de σ. En déduire une impossibilité.

Les deux racines a et b de l'équation (E) sont donc des valeurs propres de f. Dans la suite, on suppose $a > b$.

IV. Relation portant sur r, s, a, b et σ.

On note r la dimension du noyau de $f - a\,id$ et s la dimension du noyau de $f - b\,id$.

1. Exprimer $(a-b)^2$ en fonction de σ.
2. Exprimer le produit matriciel $\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ en fonction de σ.
3. En déduire $(r-s)(a-b)$ en fonction de σ.
4. Pour quelle valeur de σ a-t-on $r = s$? Que valent alors r et s ?

V. On caractérise la matrice M par une matrice diagonale semblable à M, et on suppose que $a - b \notin \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $r = s$. En déduire σ et n.
2. Déterminer a et b et donner une matrice diagonale semblable à M.

** FIN **

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/350 - Wadifa Info - page 4/5

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة توظيف بالفلاحة والصيد البحري والتنمية القروية والمياه والغابات تخصص المطلوب

Modèle de concours : Concours – Ministère de l'Agriculture, de la Pêche Maritime, du Développement Rural et des Eaux et

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/785

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

www.wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me