

Concours d'accès en première année
Sciences Mathématiques A et B
Epreuve de Mathématiques. Durée : 3h30mn.
L'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1 (Chaque question est sur 3 points)

Toutes les questions sont indépendantes.

Des affirmations sont données ci-dessous. Dire si chacune de ces affirmations est vraie ou fausse (=2pts), et si, en plus, la réponse est justifiée (=1pt).

1. Soit la fonction définie par $f(x) = (1 + x^2)e^x$ pour tout x réel. Affirmation : La courbe représentative de f est toujours située au dessus de l'axe des abscisses.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x - \frac{1}{x+1}$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$. On note (C) la courbe représentative de g et A le point d'abscisse 0. Affirmation : La tangente à (C) en A a pour équation $y = 2x - 1$.
3. Soient deux événements A et B . On suppose que la probabilité de A est égale à 0,4 et que la probabilité de l'événement $\bar{A} \cap B$ est égale à 0,12. Affirmation : la probabilité de B sachant que $\bar{A}$ est réalisé est égale à 0,2.
4. On lance deux dés cubiques équilibrés et on lit la somme des résultats des faces supérieures. Affirmation : La probabilité d'obtenir une somme égale à 5 est égale à $5/36$.
5. Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et commutant par composition : $f \circ g = g \circ f$. Affirmation : Il existe $a \in [0, 1]$ tel que $f(a) = a$.
6. Soit l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^x$. Affirmation : la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = (x^2 + 4x + 7)e^x$ est solution de (E) .

Exercice 2 (Chaque question et sous-question est sur 2 points)

Toutes les questions sont indépendantes.

1. Montrer que le polynôme $P(x) = (\cos \alpha + x \sin \alpha)^n - \cos(n\alpha) - x \sin(n\alpha)$ est divisible par $x^2 + 1$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner l'équation de la courbe définie par $\operatorname{Re}(\frac{z}{z-1}) = 1/4$, pour $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$.
3. Trouver l'ensemble des points du plan $z = x + iy \in \mathbb{C}$ dans les cas suivants :
 - (a) $|z| > 2 + \operatorname{Im}(z)$.
 - (b) $|z| - \operatorname{Re}(z) \leq 0$.

4. Supposons que $2 \log(x - 2y) = \log x + \log y$ pour x, y réels dans leurs domaines de définition. Calculer $\frac{x}{y}$.

5. On définit la suite de fonctions

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x}; f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x)), \text{ pour } n \geq 1.$$

Calculer $f_{2009}(2009)$.

Exercice 3 (Chaque question est sur 2 points)

Calculer les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ des suites suivantes dans les cas suivants :

(a) $u_n = \frac{\cos n}{n}$. (b) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}}$. (c) $u_n = (1 + \frac{1}{2} \sin n)^{\frac{1}{n}}$.
 (d) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. (e) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$, pour $n \in \mathbb{N}$. (f) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (Chaque question est sur 2 points)

Calculer les intégrales suivantes

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \sin(x) dx$. (b) $\int_0^1 x \arctan(x) dx$. (c) $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} dx$.

Exercice 5

On considère l'équation

$$x^n + y^n = z^n \quad (1)$$

pour $n \in \mathbb{N}$ pair et $x, y \in \mathbb{N}$ impairs.

1. Trouver les carrés de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (i.e. l'ensemble des $a \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ tel qu'il existe $b \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ avec $b^2 \equiv a \pmod{8}$). (2pts)
2. Montrer que si $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ est solution de l'équation (1), alors $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ et $y^2 \equiv 1 \pmod{8}$. En déduire que $x^n \equiv y^n \equiv 1 \pmod{8}$. (3pts)
3. En déduire que l'équation (1) n'a pas de solution pour n pair et x, y impairs. (2pts)

Exercice 6

On considère l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est bijective, que $f(-x) = -f(x)$ et que $f(0) = 0$. (4pts)
2. Montrer que f préserve le signe (i.e. si $x > 0$, alors $f(x) > 0$, et si $x < 0$, alors $f(x) < 0$). (1pt)
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x - f(x)) = -(x - f(x))$. (1pt)
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$. (1pt)