

Concours d'entrée en 3^{ème} année à l'ENSA de Safi
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Date: 18 juillet 2006

Durée du sujet: 3 heures
Enseignant: Mr LAKHEL E.

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Partie I: Séries de Fourier et Fonctions à variation bornée

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continue par morceaux et de période 2π , on associe ses coefficients de Fourier exponentiels définis, pour $n \in \mathbb{Z}$, par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt$ et ses coefficients de Fourier trigonométriques définis par: $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt) dt$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt) dt$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

On pose, pour tout entier naturel p et tout réel x :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^p c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)).$$

Pour deux réels $a < b$ on note $S_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$. Si f est une fonction de $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in S_{[a,b]}$, on note

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

On dira que la fonction f est à variation bornée s'il existe un réel positif M tel que pour toute $\sigma \in S_{[a,b]}$, l'on ait : $V(\sigma, f) \leq M$. On appelle alors **variation totale** de f sur $[a, b]$ le réel positif noté :

$$V([a, b], f) = \sup_{\sigma \in S_{[a,b]}} V(\sigma, f).$$

I-A. Résultats préliminaires

- I-1. Rappeler le théorème de Dirichlet en précisant de quel type de convergence il s'agit. Cette convergence pourrait-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?
- I-2. On considère la fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de période 2π paire et définie pour $x \in [0, \pi]$ par $\varphi(x) = \sqrt{x}$. Donner l'allure de la courbe de cette fonction et expliquer pourquoi elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- I-3. **Théorème de Cesàro**

Soit (u_n) une suite de complexes qui converge vers le complexe l .

- a. Justifier, simplement, en utilisant un théorème de sommation de relations de comparaison, que:

$$\sum_{k=0}^n (u_k - l) = o(n+1) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

- b. En déduire que la suite $(\frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1})$ converge vers l .

- I-4. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et de période 2π dont la somme de Fourier de rang n est notée $S_n(f)$. Pour n entier naturel non nul, on définit la somme de Fejér de f de rang n , notée $\sigma_n(f)$ comme la moyenne de Cesàro des sommes de Fourier:

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} (S_0(f) + S_1(f) + \dots + S_n(f)).$$

On démontre, et nous l'admettons, le **théorème de Fejér**:

«La suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f ».

Une application: Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue et de période 2π telle que la suite $(S_n(f))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, montrer que la suite $(S_n(f))$ converge vers la fonction f .

- I-5. Si (u_n) est une suite de réels positifs qui converge vers 0, montrer qu'il existe une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq d_n$ (on pourra, par exemple, vérifier que la suite $(\sup\{u_k, k \geq n\})_n$ convient).

I-B. Fonctions à variation bornée

- I-6. Montrer que la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \cos(\frac{\pi}{2x})$ si $x \neq 0$ est continue et n'est pas à variation bornée sur $[0, 1]$.
(on pourra choisir $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ subdivision de $[0, 1]$:

$$x_0 = 0, x_{n+1} = 1 \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad x_k = \frac{1}{2(n+1-k)}.$$

- I-7. Exemples généraux.

- Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est monotone est à variation bornée sur $[a, b]$ et préciser $V([a, b], f)$.
- Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est somme de deux fonctions monotones est à variation bornée sur $[a, b]$.
- Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ qui est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est à variation bornée.

- I-8. Soit une fonction f de $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ à variation bornée sur $[a, b]$ et soit $a < c < b$.
Montrer que chacune des restrictions de f aux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ est à variation bornée et que:

$$V([a, c], f) + V([c, b], f) \leq V([a, b], f).$$

- I-9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et de période 2π telle que la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ soit à variation bornée.

Pour n entier relatif et N entier naturel, tous deux non nuls, on utilisera la subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq |n|N}$ de $[0, 2\pi]$ définie, pour k entier compris entre 0 et $|n|N$, par: $x_k = \frac{2\pi k}{|n|N}$.

Pour k entier compris entre 0 et $|n|N$, on notera $V_k(f)$ la variation totale de f sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$.

- a. Vérifier que:

$$\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k)) e^{-int} dt \right| \leq \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f) (x_k - x_{k-1}).$$

- b. Montrer que:

$$\left| \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f).$$

- c. En déduire que pour tout entier naturel non nul,

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi|n|} V([0, 2\pi], f).$$

- I-10. Soit u_n une suite de complexes, on pose, pour tout entier naturel n ,

$$S_n = \sum_{j=0}^n u_j \text{ et } \sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}.$$

On suppose que la suite (σ_n) converge vers un complexe L et on suppose qu'il existe une constante réelle A non nulle telle que, pour tout entier naturel k , $|u_k| \leq \frac{A}{k+1}$.

- Pour n et k entiers naturels non nuls, exprimer, à l'aide des termes de la suite (u_i) , l'expression $k(S_n - L) - (n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L)$.
- Soit une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n , $|\sigma_n - L| \leq d_n$, montrer que, pour n et k entiers naturels non nuls:

$$|S_n - L| \leq (1 + \frac{2n}{k}) d_{n-1} + A \frac{k-1}{2(n+2)}.$$

- c. L'entier naturel non nul n étant donné, on choisit k tel que $(k-1)^2 \leq 4n^2 d_{n-1} < k^2$.
 ($k-1$ est donc la partie entière de $2n\sqrt{d_{n-1}}$). Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a: $|S_n - L| \leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$. Que peut-on en déduire?
- I-11. Montrer que la série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et de période 2π telle que la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ soit à variation bornée converge uniformément vers la fonction f .
- I-12. Montrer que la série de Fourier de la fonction φ de la question 2. converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction φ .

Partie II: Matrices Stochastiques¹

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$ (où $n \geq 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On se propose d'étudier l'ensemble des valeurs propres des matrices stochastiques d'ordre n . Une matrice $S = (s_{ij})_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si et seulement si

$$\forall i, j \quad s_{ij} \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall i \quad \sum_{j=1}^n s_{ij} = s_{i1} + s_{i2} + \dots + s_{in} = 1.$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ces matrices sont stables par le produit. Dans la suite, on désigne par f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ dont la matrice $S = (s_{ij})$ est stochastique.

- II.1 V_1 le vecteur de E dont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont toutes égales à 1.
 Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients réels positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $MV_1 = V_1$.
- II.2 Dédurre que 1 est une valeur propre de f .
- II.3 Soit λ une valeur propre de f autre que 1. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.
 (Indication: Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $E = \mathbb{R}^n$, on convient de noter:
 $|x| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$.
 pour $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que $|f(x)| \leq |x|$. Puis conclure).
- II.4 Montrer que

$$\text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Im}(f - Id) = \mathbb{R}^n.$$
- II.5 Montrer que $\text{Im}(f - Id)$ est stable par f . Etablir que tout sous-espace propre E_λ de f associé à une valeur propre λ autre que 1 est inclus dans $\text{Im}(f - Id)$.

On suppose désormais que l'endomorphisme f est diagonalisable.

- II.6 Montrer que la somme directe des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de f autre que 1 est égale à $\text{Im}(f - Id)$.
- II.7 On complète une base $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ de $E_1 = \text{Ker}(f - Id)$ en une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs propres de f . On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f rangées par modules décroissants ($1 = |\lambda_1| = \dots = |\lambda_p| \geq |\lambda_{p+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|$), associées à ces vecteurs propres $v_1, v_2, \dots, v_n$. Soit D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
 Prouver que la suite de matrices (S^k) converge si et seulement si la suite (D^k) converge.
 Dédurre que la suite (S^k) est convergente.
 (Pour une suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on dit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = A$, si, en notant: $A_k = (a_{ij}^{(k)})$, on a: $\forall i, j, \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$).

FIN DE L'ÉPREUVE.

¹Ces matrices jouent un rôle important, notamment en calcul de probabilités.