



1	المعامل:
---	----------

المجال	مادة التخصص المدرسة : الرياضيات
--------	---------------------------------

مدة الإنجاز:	4 ساعات
-----------------	---------

N.B :

Il est interdit d'utiliser la calculatrice, le téléphone portable, tout matériel électronique et toute documentation.

Exercice 1 : (4points)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$.

0,25

1. Calculer I_0 et I_1 .

0,5

2. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$.

0,25

3. En déduire que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

0,5

4. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+2}$.

0,5

5. a) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) 2(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2.$$

0,5

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

0,5

6. a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx$$

0,25

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{1}{2n+4}$.

0,25

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$.

0,5

d) Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0$$

1.

0,5

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

0,5

b) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$ ✓2. Soit g la fonction définie par

$$g(x) = e^x - xe^x - 1$$

0,5

a) Montrer que pour tout x non nul, $g(x) < 0$ ✓

0,25

b) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

0,25

c) Etudier les branches infinies de f .

0,5

d) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3.

0,25

a) Vérifier que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
On note f^{-1} sa réciproque.

0,25

b) Construire la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que celle de f .

0,25

c) Préciser $f^{-1}(1)$ et construire la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe représentative de f^{-1} .4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons (E_n) l'équation : $f(x) = n$

0,5

a) Montrer que l'équation (E_n) a une unique solution u_n .

0,95

b) Trouver la valeur de u_1 .

1

c) Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et calculer sa limite. ✓

1

d) Justifier que : $u_n \sim -n \text{ en } +\infty$. ✓

Exercice 3 : (5points)

On considère les éléments suivants de

$$M_3(\mathbb{R}) : I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K .

Pour toute matrice M de E , on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note,

Pour tout entier naturel k , $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que

$$(M^k)^{-1} = M^{-k}.$$

1. Déterminer la dimension de E .

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2 .

3. Soit la matrice $L = I + J$.

a) Montrer que pour tout entier naturel :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K ;$$

b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K.$$

c) Exprimer, pour tout entier relatif n , L^n à l'aide de I, L, L^2 et n .

Exercice 4 : (5 points)

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1.

a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 8 = 0$$

b) Ecrire les solutions z_1 et z_2 de cette équation sous forme exponentielle

(z_1 est la solution dont la partie imaginaire est positive)

0,5

c) Placer dans $\mathcal{P}$ les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 .2. On considère l'application f , qui, à tout point M , d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{1}{z}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z .

0,5

a) Calculer les affixes des points A' et B' images de A et B par f .

0,25

b) Placer dans $\mathcal{P}$ les points A' et B' .

0,5

c) Montrer que pour tout point M distinct de O , les points O, M et M' sont alignés et que

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = 1.$$

3.

1

a) Montrer que : $|z - 2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2} - z \right| = |z'|$.Soit C le cercle de centre I , d'affixe 2, et de rayon 2.Soit M un point de C distinct de O .

0,5

b) Montrer que M' est situé sur une droite d que l'on caractérisera.

0,25

c) Placer dans $\mathcal{P}$, C et d .Soit M un point quelconque du cercle C , distinct de O, A et B .

0,5

d) Construire M' , l'image de M par f .