

|        |
|--------|
| الصفحة |
| 1      |
| 4      |

مباراة الدخول إلى مسلك تأهيل أساتذة التعليم  
الثانوي التأهيلي بالمراكز الجهوية لمهن  
التربية والتكوين - دورة يوليوز 2012  
الموضوع

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية  
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

|                      |                                 |            |
|----------------------|---------------------------------|------------|
| المجال               | مادة التخصص المدرسة : الرياضيات | المعامل: 1 |
| مدة الإنجاز: 4 ساعات |                                 |            |

**N.B :**

Il est interdit d'utiliser la calculatrice, le téléphone portable, tout matériel électronique et toute documentation.

**Exercice 1 : ( 5 points)**

0.5

1. On considère la fonction  $\varphi_1$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par : 
$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = x(1 + \ln x); x > 0 \end{cases}$$
  
Montrer que  $\varphi_1$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

0.5

2. pour tout réel  $x$  positif et pour tout entier naturel  $n$  non nul ,on pose :

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t) dt$$

a)montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction  $\varphi_n$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$ . Donner la valeur de  $\varphi_n(0)$  .

1

b) montrer qu'il existe deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telles que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \mathbb{R}^+), \varphi_n(x) = x^n (a_n + b_n \ln x) \text{ et que :}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1} .$$

0.5

3. calculer  $b_n$  en fonction de  $n$ .

4. pour tout entier naturel  $n$  non nul , on pose :  $u_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p}$  .

0.25

a) Montrer que :  $(\forall p \in \mathbb{N}^*), \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{p+1}$  .

0.5

b) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_n \leq 1 + \ln n$  .

0.25

5. Pour tout entier naturel  $n$  non nul , on pose :  $c_n = n! a_n$  .

a) Montrer que :  $c_n = 2 - u_n$

0.75

b) En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 2 : |c_n| \leq 1 + \ln n$  .

0.25

c) Conclure que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

0.5

d) Montrer que la série de terme général  $a_n$  est absolument convergente .

**Exercice 2 : ( 5 points)**

Pour tout entier  $n$  non nul, on note  $f_n$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = x - n \ln x.$$

- 0.5 1. a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variation.
- 0.5 b) En déduire, lorsque  $n$  est supérieur ou égale à 3, l'existence de deux réels  $u_n$  et  $v_n$  solution de l'équation  $f_n(x) = 0$  et vérifiant  $0 < u_n < n < v_n$ .
- 2.
- 0.5 a) Montrer que  $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$ .
- 0.5 b) Montrer que  $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$ , puis en conclure que  $(u_n)$  est décroissante.
- 0.5 c) En déduire que  $(u_n)_{n \geq 3}$  converge et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ .
- 0.5 d) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$  ; en déduire que  $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$ .
- 0.25 3.
- 0.5 a) Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ .
- 0.5 b) Calculer  $f_n(n \ln(n))$  puis montrer que  $\forall n \geq 3, n \ln(n) < v_n$ .  
Soit  $g$  la fonction définie par  $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = x - 2 \ln(x)$ .
- 0.5 c) Etudier  $g$  et donner son signe. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2 \ln(n)$ .
- 0.5 d) En déduire le signe de  $f_n(2n \ln(n))$ , puis établir que :  $n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$ .
- 0.25 e) Montrer que :  $\ln(v_n) \sim \ln(n)$   $_{n \rightarrow +\infty}$ .

**Exercice 3 : (5 points)**

Soit  $B = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ .

On considère les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \end{pmatrix}$  ;  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ;  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice relativement à la base  $B$  est  $A$ .

$id$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice relativement à la base  $B$  est  $I$ .

$h$  l'endomorphisme défini par :  $h = f - 3id$ .

$N$  la matrice de l'endomorphisme  $h$  relativement à la base  $B$ .

0.75

1.a) Vérifier que :  $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix}$ . En déduire  $N^2 \neq O$  ;  $N^3 = O$ .

0.25

b) Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $N$ , alors  $\lambda = 0$ .

0.25

c) Etablir que 0 est la seule valeur propre de  $h$ .

0.25

d) En déduire que  $f$  admet 3 pour unique valeur propre.

0.25

e) Déterminer une base et la dimension du sous espace propre de  $f$  associée à la valeur propre 3.

0.5

f) L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ? est-il bijectif ?

2. On considère les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  :

$$u_1 = (1, -1, 1) ; u_2 = h(u_1) ; u_3 = h(u_2).$$

0.25

a) Calculer  $u_2$  et  $u_3$ . Vérifier que  $h(u_3) = (0, 0, 0)$ .

0.25

b) Montrer que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  qu'on notera  $B'$ .

0.25

c) Déterminer la matrice  $N'$  de  $h$  relativement à la base  $B'$ .

0.25

d) Montrer que la matrice de  $f$  relativement à la base  $B'$  est :  $3I + N'$ .

3) On considère la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

a) Montrer que  $P$  est inversible et que :

0.25

$$A = P(3I + N')P^{-1}.$$

b) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à deux.

0.5

i) Montrer que :  $A^n = P(3I + N')^n P^{-1}$ ,

0.5

ii) Justifier que  $(N')^3 = O$ ,

En déduire trois réels  $a_n, b_n, c_n$  tels que :  $(3I + N')^n = a_n I + b_n N' + c_n (N')^2$

0.5

iii) Montrer que :  $A^n = a_n I + b_n N + c_n N^2$ .

#### Exercice 4 : (3.5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $A$  le point d'affixe  $z_A = \frac{i}{2}$ .

$F$  est l'application qui, à tout point  $M$ , d'affixe  $z$ , distinct de  $A$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :  $2zz' = i(z + z')$ .

On appelle  $I$  et  $J$  les points d'affixes respectives :  $z_I = 1$  et  $z_J = i$ .

Soit  $K$  le milieu du segment  $[IJ]$ .

0.25 1. a) Déterminer l'affixe  $z_K$  de  $K$ .

0.75 b) Déterminer les affixes des images des points  $I, J$  et  $K$  par l'application  $F$

0.25 c) En déduire que  $F$  ne conserve pas les milieux.

0.5 2) Déterminer les points invariants par  $F$ .

1 3) Montrer que :  $M' = F(M) \Leftrightarrow \left(z' - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ .

0.75 4) En déduire l'image par  $F$  du cercle  $(C)$  de centre  $A$  et de rayon 1.

**Exercice 5 : (1.5 points)**

0.5 1. Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n+1$  et  $2n+1$  sont premiers entre eux.

1 2. En déduire que  $n+1$  divise  $C_{2n}^n$