

موضوع في مادة الرياضيات: (10 نقط)

EXERCICE 1

On considère les ensembles suivants :

$$E_1 = \{7n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad E_2 = \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$E_3 = \{28n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad E_4 = \{30n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Question 1 Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

(a) $E_1 \subset E_3$. (b) $E_3 \subset E_2$. (c) $E_3 \cap E_4 = E_1$. (d) $E_1 \cap E_2 = E_3$.

Question 2 Soit E un ensemble non vide et $a \in E$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère l'application :

$$f: \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto \begin{cases} X \cup \{a\} & \text{si } a \notin X, \\ X \setminus \{a\} & \text{si } a \in X. \end{cases} \end{cases}$$

Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

- (a) Si E est fini alors f est injective et non surjective. (c) f est bijective.
(b) f est surjective non injective. (d) f n'est injective ni surjective.

Question 3 On suppose que E est fini de cardinal $n \geq 2$; et on note :

$\mathcal{P}_0(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair.

$\mathcal{P}_1(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair.

On a alors,

- (a) $\text{card}(\mathcal{P}_0(E)) = 2n$. (c) $\text{card}(\mathcal{P}_1(E)) = 2^{n-1}$. ✓
(b) $\text{card}(\mathcal{P}_0(E)) = 2\text{card}(\mathcal{P}_1(E))$. (d) $\text{card}(\mathcal{P}_0(E)) = \text{card}(\mathcal{P}_1(E))$. ✓

EXERCICE 2

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on note A le point d'affixe $z_A = 1$ et on considère la transformation φ qui à chaque point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1 + i)z - i.$$

Question 4 Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

- (a) Le triangle AMM' est isocèle rectangle en M . (c) Le triangle AMM' est équilatéral.
(b) Le triangle AMM' est isocèle rectangle en M' . (d) Une mesure de l'angle $(\vec{MA}, \vec{MM'})$ est $\frac{\pi}{4}$.

Question 5 Soient B le symétrique du point A par rapport à l'origine du repère O , M le point d'affixe $z = \frac{-1+i}{2}$ et M' son image par φ ; alors :

- (a) Les points A, B, M et M' appartiennent au cercle de diamètre $[AM']$.
- (b) Les points A, B, M et M' n'appartiennent à aucun cercle.
- (c) Les points A, B, M et M' appartiennent au cercle de diamètre $[AB]$.
- (d) Les points A, B, M et M' appartiennent au cercle d'équation cartésienne $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}$.

EXERCICE 3

Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A, B et C , de coordonnées :

$$A(1, 0, -1), \quad B(0, 2, -2), \quad C(2, 2, 2)$$

Question 6 Soit $\vec{n}_1(4, 1, -2)$. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

- (a) Le vecteur $\vec{n}_1$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .
- (b) Le vecteur $\vec{n}_1$ est un vecteur directeur de la droite (AC) .
- (c) Le vecteur $\vec{n}_1$ est normal au plan (ABC) . ✓
- (d) Le point C appartient à la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{AB}$.

Question 7 Une équation cartésienne du plan (ABC) est :

- (a) $4x + y - 2z = 6$. ✓
- (b) $4x - y + 2z = 6$.
- (c) $2x + 4y - z = 1$.
- (d) $x + 2y - 4z = 1$.

Question 8 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x - 2y + z = 0$. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

- ✓ (a) Les deux plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont perpendiculaires.
- (b) Les deux plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles.
- (c) Le vecteur $\vec{n}_1$ est normal au plan $\mathcal{P}$.
- ✓ (d) Les deux points A et C appartiennent à $\mathcal{P}$.

EXERCICE 4

Soit la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$\forall n \geq 2 : a_n \in]0, \pi[\text{ et } \sin(a_n) = \frac{a_n}{n}.$$

Question 9 Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

- (a) La suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est convergente de limite 0 . (c) La suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
(b) La suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est croissante. (d) Pour tout $n \geq 2 : a_n \leq \frac{\pi}{2}$.

Question 10 Il existe deux réels a et b et une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 2}$ convergeant vers 0 , tels que pour tout $n \geq 2$, on a $a_n = a + \frac{b}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon_n$, alors :

- (a) $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$. (b) $a = \pi$ et $b = -\pi$. (c) $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = -\pi$. (d) $a = \pi$ et $b = -\frac{\pi}{2}$.

Question 11 On note A l'ensemble :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = x^2 + x + 1\} ;$$

Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

- (a) $A \subset [0, 1]$. (b) $A \subset]-1, 0[$. (c) A n'est pas borné. (d) A contient au moins trois éléments

EXERCICE 5

Soit l'équation différentielle

$$(1 + x^2) y'(x) + 2xy(x) = \frac{1}{x}, \quad (E)$$

que l'on étudie sur $I =]0, +\infty[$.

Question 12 Soient $y_0 \in \mathbb{R}$ et f la solution de (E) sur I telle que $f(1) = y_0$. La tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe représentative de f au point $A(1, y_0)$ admet pour équation :

- (a) $y = y_0 + (1 - y_0)(x - 1)$. (c) $y = (1 - y_0)x + 2y_0 - 1$.
✓ (b) $y = \frac{1}{2}(x - 1) - y_0(x - 2)$. (d) $y = \left(\frac{1}{2} + y_0\right)x + 2y_0 - 1$.

Question 13 Les tangentes $\mathcal{T}_A$, lorsque y_0 varie, sont :

- (a) Concourantes au point $B(3, 2)$. (c) Concourantes au point $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
(b) Parallèles . (d) Concourantes au point $B(1, 1)$.

EXERCICE 6

Soit f et g la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Question 14 Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

- (a) f est croissante. (c) f est bornée.
(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$. (d) f est paire.

Question 15 On note g la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$; alors :

(a) g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{-x^2}f(x)$. (c) $g(0) = \frac{\pi}{4}$.

(b) g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -2f'(x)f(x)$. (d) $g(0) = \frac{\pi}{2}$.

Question 16 En considérant la fonction $g + f^2$, on peut alors conclure que :

(a) f admet une limite en $+\infty$ qui vaut $\frac{\pi}{2}$. (c) f admet une limite en $+\infty$ qui vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ✓

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. (d) f admet une limite en $+\infty$ qui vaut $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$. La suite $(S_n)_n$ est croissante et majorée et donc convergente. On se propose de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, notée $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Question 17 Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

(a) $\frac{4}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{4})}$. (c) $\frac{2}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{x+\pi}{2})}$.

(b) $\frac{4}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi-x}{2})}$. (d) $\frac{2}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{4})}$.

Question 18 On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

(a) $\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2^n$. (c) $\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2^{4n-3}$.

(b) $\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2^{2n-1}$. (d) $\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2^{3n-2}$.

✓ Question 19 Soit g la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, par $g(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$. (c) g est bornée sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. ✓
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$. (d) g n'est pas prolongeable par continuité à droite de 0.

✓ Question 20 En majorant $\left| \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} \left(\frac{1}{\sin^2(x_k)} - \frac{1}{(x_k)^2} \right) \right|$ avec $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$, on démontre que :

- (a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (c) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$.
 (b) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. (d) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$.