

Concours d'entrée en première année
Cycle ingénieur de l'ENSAO

Epreuve de Mathématiques

Mercredi 27 juillet 2011 - Durée 2 heures

Les calculatrices sont strictement interdites

Question 1

Le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit, ε désignant une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

- (A) $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2 \varepsilon(x)$ (B) $\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x)$
(C) $-\frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x)$ (D) $\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + x^2 \varepsilon(x)$

Question 2

La fraction rationnelle $\frac{3X^3 + X}{(X+1)^2(X^2+1)}$ se décompose en éléments simples sous la forme

- (A) $\frac{3}{X+1} - \frac{2}{(X+1)^2} - \frac{1}{X^2+1}$ (B) $\frac{2}{(X+1)^2} - \frac{1}{X^2+1}$
(C) $\frac{3}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{2}{X^2+1}$ (D) $\frac{1}{X+1} - \frac{3}{(X+1)^2} + \frac{2}{X^2+1}$

Question 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) & \text{si } x \neq \pm 1 \\ 0 & \text{si } x = \pm 1 \end{cases}$

- (A) f est continue sur $\mathbb{R}$ (B) f est continue à droite en 1
(C) f est dérivable à droite en 1 (D) f est dérivable à gauche en 1

Question 4

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- (A) Les lignes de A sont linéairement indépendantes.
(B) La matrice A admet -1 pour valeur propre.
(C) Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A .
(D) La matrice A admet trois valeurs propres distinctes.

Question 5

La somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ vaut

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$

Question 6

On considère l'équation différentielle (E) : $4y''(t) - 5y'(t) + y(t) = 0$.

Si l'on désigne par λ et μ deux constantes réelles, alors la solution générale de l'équation (E) s'écrit sous la forme

(A) $y(t) = \lambda e^{\frac{t}{2}} + \mu e^{2t}$

(B) $y(t) = \lambda e^{-\frac{t}{4}} + \mu e^t$

(C) $y(t) = \lambda e^{\frac{t}{4}} + \mu e^t$

(D) $y(t) = \lambda e^{-\frac{t}{4}} + \mu e^{-t}$

Question 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$.

I_n et I_{n+1} sont liées par la relation de récurrence suivante :

(A) $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$

(B) $I_{n+1} = \frac{2n+1}{n} I_n + \frac{1}{2^n}$

(C) $I_{n+1} = \frac{1}{2n} I_n - \frac{1}{2^n}$

(D) $I_{n+1} = \frac{n}{2n+1} I_n - \frac{1}{2^n}$

Question 8

L'intégrale double $I = \iint_D \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$, vaut

(A) $\frac{\pi \ln 2}{4}$

(B) $\pi \ln 2$

(C) $2\pi \ln 2$

(D) $\frac{\pi \ln 2}{2}$

Question 9

Soit le nombre complexe $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.

(A) La forme algébrique de z est $z = 1 - i$.

(B) L'argument de z est $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

(C) $|z| = \sqrt{2}$.

(D) $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Question 10

L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}$, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout triplet (x, y, z) de réels associe le triplet $(x + 3z, 0, y - 2z)$.

La matrice A de f s'écrit dans la base canonique $\mathcal{B}$:

(A) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Question 11

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{3n^3 + n + 1}{n!} x^n$ est

- (A) $R = 1$ (B) $R = 0$ (C) $R = +\infty$ (D) $R = \frac{1}{3}$

Question 12

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z + |z|^2 = 7 + i$.
Cette équation admet :

- (A) deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.
(B) une solution réelle.
(C) deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.
(D) une solution qui a pour partie imaginaire 2.

Question 13

La limite en 0 de la fonction $\frac{e^x - \cos x - x}{x^2}$ est égale à

- (A) 0 (B) $+\infty$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

Question 14

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$. Parmi les affirmations suivantes laquelle est juste ?

- (A) Si le gradient de f s'annule en (a, b) alors $a = b = 1$.
(B) Le point $A(0, 0)$ est un minimum local de f .
(C) Le point $B(-1, -1)$ est un maximum local de f .
(D) $(1, 1)$ est un point selle de f .

Question 15

Parmi les intégrales généralisées suivantes, une seule est convergente. Laquelle ?

- (A) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ (B) $\int_1^{+\infty} x \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) dx$
(C) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ (D) $\int_1^{+\infty} (x^2 - 1) dx$

Question 16

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$ et soit D son domaine de définition.

- (A) $D =]0, +\infty[$ (B) f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$
(C) $\forall x \in D, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(1 + \ln x)^2}$ (D) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

Question 17

Soit l'équation différentielle du premier ordre (E) : $y'(t) = \frac{2t-1}{t^2}y(t) + 1$. Alors

- (A) $y(t) = t^2(1 + e^{-1/t})$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- (B) $y(t) = t^2(1 - e^{1/t})$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
- (C) $y(t) = t^2(1 - e^{1/t})$ est solution de l'équation homogène associée à (E).
- (D) $y(t) = 2t^2 e^{1/t}(1 + e^{-1/t})$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

Question 18

Parmi les séries numériques suivantes, une seule est convergente. Laquelle ?

- (A) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1$
- (B) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
- (C) $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$
- (D) $u_n = \frac{(-1)^n n}{(n+1)!}$

Question 19

Soit f la fonction 2π -périodique, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi - x}{2} & \text{si } 0 < x < 2\pi \\ f(0) = f(2\pi) = 0 \end{cases}$$

On note $S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ son développement en série de Fourier.

Alors

- (A) $a_0 = \frac{\pi}{2}$
- (B) $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{(-1)^n}{n}$
- (C) $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = b_n$
- (D) $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$

Question 20

Parmi ces affirmations laquelle est juste ?

- (A) Le degré de la somme de deux polynômes est le plus grand des deux degrés.
- (B) Si un polynôme est divisible par deux polynômes alors il est divisible par leur produit.
- (C) Le degré du produit de deux polynômes est la somme des deux degrés.
- (D) Tout polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$ possède n racines distinctes.