L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des concours MP et TSI, comporte 9 pages : 8 pages de texte et 1 page de figures.
L'usage de la calculatrice est interdit.

QUELQUES ASPECTS DE LA DYNAMIQUE TERRESTRE

Le problème propose l'étude de quelques propriétés des champs de gravitation et de pesanteur.

Les différentes parties du problème sont largement indépendantes entre elles et comportent chacune plusieurs questions indépendantes. Les différentes parties peuvent être traitées dans un ordre quelconque, toutefois avant d'aborder l'une des parties du problème il est conseillé de lire celles qui la précédent.

Lors des calculs numériques, dont l'importance ne doit pas être négligée, seuls des ordres de grandeur seront demandés. De ce fait, si X est la valeur numérique « exacte » d'une grandeur donnée alors toutes les valeurs comprises entre X/10 et 10 X seront acceptées. Seule la question 3.5.6. exigera un calcul d'ordre de grandeur un peu plus précis.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies ; il convient en particulier de rappeler avec précision les références exactes des questions abordées.

Données utiles

- Célérité de la lumière dans le vide $c_0 \approx 3{,}0 \times 10^8$ m.s^{-1}.
- Constante de gravitation universelle $\mathcal{G} \approx 6{,}7 \times 10^{-11}$ u.S.I.
- Permittivité électrique du vide $\varepsilon_0 \approx \dfrac{1}{36\pi 10^9}$ u.S.I. $\approx 8{,}8 \times 10^{-12}$ u.S.I.
- Masse de la Terre $m_T \approx 6{,}0 \times 10^{24}$ kg.
- Rayon moyen de la Terre $R_T \approx 6{,}4 \times 10^6$ m.
- Masse de la lune $m_L \approx 7{,}3 \times 10^{22}$ kg.
- Distance moyenne Terre-Lune $d_L \approx 3{,}8 \times 10^8$ m.
- Masse du Soleil $m_S \approx 2 \times 10^{30}$ kg.
- Distance moyenne Terre-Soleil $d_S \approx 1{,}5 \times 10^{11}$ m.
- $\sin a - \sin b = 2 \sin \dfrac{a-b}{2} \cos \dfrac{a+b}{2}$.

1ère Partie
Analogie électromécanique

1.1. On considère deux masses m_1 et m_2 ponctuelles situées respectivement aux points M_1 et M_2 de l'espace.

1.1.1. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}^{g}_{1\to 2}$ exercée par m_1 sur m_2 en fonction de m_1, m_2, $\mathcal{G}$ et $\vec{r}_{12} = \overrightarrow{M_1M_2}$. Cette force est-elle attractive ou répulsive ?

1.1.2. Quelle est la dimension de la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$? Avec quelle unité s'exprime-t-elle dans le système international des unités (S.I.) ?

1.2. On considère deux charges ponctuelles q_1 et q_2 situées respectivement aux points M_1 et M_2 de l'espace.

1.2.1. Donner l'expression de la force électrostatique $\vec{F}^{e}_{1\to 2}$ exercée par q_1 sur q_2 en fonction de q_1, q_2, $\vec{r}_{12} = \overrightarrow{M_1M_2}$ et de la permittivité électrique du vide ε_0. Cette force est-elle attractive ou répulsive ? Avec quelle unité pratique exprime-t-on ε_0 dans le S.I.

1.2.2. Le champ électrostatique $\vec{E}_1(M_2)$ créé par la chargé q_1 au point M_2 est défini par $\vec{F}^{e}_{1\to 2} = q_2 \vec{E}_1(M_2)$. Donner l'expression de $\vec{E}_1(M_2)$ et calculer le flux ϕ_e de $\vec{E}_1$ à travers une surface fermée quelconque entourant le point M_1. On rappelle que l'angle solide Ω sous lequel on voit une surface fermée quelconque à partir d'un point à l'intérieur de cette surface vaut 4π.

1.2.3. Généraliser le résultat précédent à une distribution quelconque de charges en donnant le théorème de Gauss ainsi que l'équation de Maxwell-Gauss. Cette équation reste-t-elle valable en régime variable ?

1.3. En comparant les expressions de $\vec{F}^{g}_{1\to 2}$ et $\vec{F}^{e}_{1\to 2}$, dégager une analogie entre les grandeurs électriques et les grandeurs mécaniques. Quel est l'analogue mécanique du champ électrostatique $\vec{E}$?

Le champ gravitationnel $\vec{G}$ créé en un point M de l'espace par une distribution de masse $\mathcal{D}$ donnée est défini

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2871 - Wadifa Info - page 1/10

par $\vec{F}^{g}(M) = m\vec{G}(M)$ où $\vec{F}^{g}(M)$ est la force gravitationnelle exercée par la distribution $\mathcal{D}$ sur une masse m placée au point M.

1.4. En s'inspirant de l'analogie du § 1.3., donner l'équivalent du théorème de Gauss pour le champ gravitationnel créé par une distribution de masse quelconque $\mathcal{D}$ ainsi que l'équivalent de l'équation de Maxwell-Gauss pour le champ gravitationnel. On notera μ la masse volumique de la distribution. On fera attention à la nature attractive ou répulsive de la force gravitationnelle.

2ème Partie
Champ gravitationnel terrestre

On assimile la Terre à une boule (sphère pleine) homogène de centre T, de rayon R_T et de masse m_T. On repère un point M quelconque de l'espace par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ) telles que $r = \left\|\overrightarrow{TM}\right\|$. On note $\vec{G}_T(M)$ le champ gravitationnel terrestre au point M.

2.1. En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de masse, montrer que $\vec{G}_T(M)$ peut s'écrire $\vec{G}_T(M) = G_T(r)\vec{u}_r$ dans la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ des coordonnées sphériques de centre T.

2.2. Montrer, *sans faire de calcul*, que $G_T(r)$ est nul au centre de la Terre.

2.3. En utilisant le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel, établir l'expression de $G_T(r)$ en tout point M de l'espace et représenter graphiquement $G_T(r)$. On donnera l'ordre de grandeur de G_T à la surface de la Terre.

2.4. **Application** : On imagine que l'on perce un tunnel le long d'un diamètre de la Terre. À l'une des extrémités du tunnel on abandonne sans vitesse initiale un objet de masse m que l'on pourra assimiler à un point matériel. On néglige toute force autre que la force gravitationnelle terrestre et on supposera dans cette section (2.4.) que le référentiel terrestre est galiléen.

2.4.1. Établir l'équation différentielle du mouvement de l'objet. Quelle est la nature du mouvement ? Exprimer sa période T.

2.4.2. Calculer l'ordre de grandeur de T. Commenter.

2.4.3. La propriété précédente peut-elle donner lieu à une application pratique ? Laquelle ?

3ème Partie
Dynamique terrestre - Champ de pesanteur

La dynamique terrestre s'intéresse à l'étude du mouvement des corps relativement au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$.

3.1. Référentiels

3.1.1. Donner une définition aussi claire et concise que possible du référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$, du référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ et du référentiel de Copernic $\mathcal{R}_C$.

3.1.2. Qu'appelle-t-on référentiel galiléen ? Lequel des trois référentiels $\mathcal{R}_T$, $\mathcal{R}_G$ ou $\mathcal{R}_C$ est le « meilleur » référentiel galiléen ?

3.1.3. Quelle est la nature du mouvement de $\mathcal{R}_T$ par rapport à $\mathcal{R}_G$? De $\mathcal{R}_G$ par rapport à $\mathcal{R}_C$?

3.1.4. On appelle référentiel héliocentrique le référentiel barycentrique du soleil. En première approximation, souvent suffisante, le référentiel héliocentrique peut être confondu avec l'un des trois référentiels $\mathcal{R}_T$, $\mathcal{R}_G$ ou $\mathcal{R}_C$. Lequel ? Pourquoi ?

3.2. Équation fondamentale de la dynamique terrestre

Dans toute la suite du problème, on s'intéressera au mouvement, relativement à $\mathcal{R}_T$, d'un corps que l'on pourra assimiler à un point matériel M de masse m.

3.2.1. Préciser le sens de l'approximation « point matériel ».

3.2.2. Écrire, relativement à $\mathcal{R}_T$, l'équation traduisant la deuxième loi de Newton (ou Relation Fondamentale de la Dynamique) pour le point matériel M. On utilisera les notations suivantes :

- $\overset{\mathcal{R}_T}{\vec{a}}(M)$ désigne l'accélération du point M par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$;
- $\overset{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C}{\vec{a}_e}(M)$ désigne l'accélération d'entraînement au point M du référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ par rapport au référentiel de Copernic $\mathcal{R}_C$ donnée par

$$\overset{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C}{\vec{a}_e}(M) = \overset{\mathcal{R}_C}{\vec{a}}(T) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\overrightarrow{TM} + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{TM}\right)$$

où

- $\overset{\mathcal{R}_C}{\vec{a}}(T)$ est l'accélération du centre d'inertie T de la Terre par rapport à $\mathcal{R}_C$;

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2871 - Wadifa Info - page 2/10

- $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation instantané de $\mathcal{R}_T$ par rapport à $\mathcal{R}_C$;
- $\times$ désigne le produit vectoriel (ou produit extérieur) ;

- $\vec{a}_c^{\,\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C}(M)$ désigne l'accélération de Coriolis au point M de $\mathcal{R}_T$ par rapport à $\mathcal{R}_C$ donnée par

$$\vec{a}_c^{\,\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C}(M) = 2\vec{\Omega}\times \vec{v}^{\,\mathcal{R}_T}(M)$$

où $\vec{v}^{\,\mathcal{R}_T}(M)$ désigne la vitesse du point M par rapport à $\mathcal{R}_T$;

- $\vec{F}_a$ désigne la résultante des forces appliquées à M, autres que celles traduisant l'action gravitationnelle de la Terre et des autres astres ;
- $\vec{G}_T(M)$ désigne la champ gravitationnel terrestre au point M ;
- $\vec{G}_A(M)$ désigne le champ gravitationnel au point M créé par les autres astres (autres que la Terre).

3.2.3. En appliquant un théorème adéquat de la mécanique à la Terre dans son mouvement relativement au référentiel de Copernic $\mathcal{R}_C$, exprimer $\vec{a}^{\,\mathcal{R}_C}(T)$ en fonction de $\vec{G}_A(T)$. Dans cette question, on pourra considérer la Terre comme une masse ponctuelle centrée en T.

3.3. Le champ de pesanteur – Équation fondamentale de la dynamique terrestre

On définit le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ d'un corps de masse m comme étant la force opposée à la tension $\vec{T}$ d'un fil qui permet de maintenir le corps en équilibre dans le référentiel terrestre ; $\vec{g}$ désignant le champ de pesanteur terrestre (ou accélération de la pesanteur).

3.3.1. En utilisant les résultats de 3.2.2. et 3.2.3., montrer que l'on peut écrire l'expression du champ de pesanteur $\vec{g}(M)$ sous la forme

$$\vec{g}(M) = \vec{g}^{(0)}(M) + \vec{g}^{(1)}(M) + \vec{g}^{(2)}(M) + \vec{g}^{(3)}(M),$$

où

- $\vec{g}^{(1)}(M) = \vec{G}_A(M) - \vec{G}_A(T)$,
- $\vec{g}^{(2)}(M) = -\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{TM}\right)$,
- $\vec{g}^{(3)}(M) = -\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\overrightarrow{TM}$.

3.3.2. Donner l'expression de $\vec{g}^{(0)}(M)$ en fonction de $\vec{G}_T(M)$.

3.3.3. Écrire alors l'équation dite « fondamentale de la dynamique terrestre » donnant l'accélération $\vec{a}^{\,\mathcal{R}_T}(M)$ d'un point matériel mobile M de masse m en fonction de m, $\vec{F}_a$, $\vec{g}(M)$, $\vec{\Omega}$ et $\vec{v}^{\,\mathcal{R}_T}(M)$.

Dans la suite de cette partie, on s'intéresse à l'examen des ordres de grandeur des différents termes intervenant dans l'expression de $\vec{g}$.

3.4. Terme principal

Dans l'hypothèse d'une symétrie sphérique de la Terre, donner l'ordre de grandeur du module $g^{(0)}(R_T)$ de $\vec{g}^{(0)}(M)$ à la surface de la Terre. On pourra utiliser les résultats de la question 2.3.

3.5. Terme différentiel ou terme de marée

Le terme $\vec{g}^{(1)}(M) = \vec{G}_A(M) - \vec{G}_A(T)$ traduit l'action des autres astres sur un corps placé au voisinage de la Terre. Ce terme différentiel est à l'origine du phénomène des marées.

Considérons un astre A de masse m_A à symétrie sphérique situé à une distance moyenne d_A de la Terre. Pour simplifier, on considérera que les plans équatoriaux de la Terre et de l'Astre sont confondus (figure 1).

3.5.1. Comparer $\vec{g}^{(1)}(M_1)$ et $\vec{g}^{(1)}(M_2)$ après les avoir exprimés en ne tenant compte que du terme d'ordre le plus bas non nul en R_T/d_A. Représenter $\vec{g}^{(1)}(M_1)$ et $\vec{g}^{(1)}(M_2)$ sur un schéma en montrant leur sens.

3.5.2. Quel est, dans la disposition de la figure 1, l'état de la marée (basse ou haute) aux points M_1, M_2, N_1 et

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2871 - Wadifa Info - page 3/10

N_2 ?

3.5.3. Que peut-on en déduire quant au nombre de marées par jour ?

3.5.4. Exprimer $\vec{g}^{(1)}(N_1)$ dans la base $(\vec{u},\vec{u'})$ et montrer qu'avec le même ordre d'approximation en R_T/d_A, l'une des composantes de $\vec{g}^{(1)}(N_1)$ est négligeable devant l'autre. Comparer alors l'intensité du terme différentiel aux points M_1 et N_1.

3.5.5. En déduire une majoration $g^{(1)}{}_{maj}$ du module de $\vec{g}^{(1)}(M)$ en fonction de $\mathcal{G}$, m_A, R_T et d_A pour des points voisins de la surface terrestre.

3.5.6. Calculer l'ordre de grandeur de $g^{(1)}{}_{maj}$ lorsque l'astre A est la lune puis refaire le même calcul lorsque l'astre A est le soleil. Lequel de ces deux astres influe le plus sur les marées terrestres ? Peut-on négliger l'influence de l'un de ces deux astres devant celle de l'autre ?

3.5.7. En comparant les ordres de grandeur de $g^{(1)}{}_{maj}$ et $g^{(0)}(R_T)$, montrer que l'on peut négliger, en première approximation, le terme différentiel $\vec{g}^{(1)}(M)$ devant $\vec{g}^{(0)}(M)$.

3.6. Les autres termes

Relativement au référentiel géocentrique, la Terre est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe SN reliant ses deux pôles S et N de vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$ et de période T. L'axe de rotation SN fait un angle constant de 23° 27 minutes d'arc par rapport à la perpendiculaire Δ au plan de la trajectoire de la Terre dans son mouvement autour du soleil ou plan de l'écliptique (figure 2).

3.6.1. Que vaut T ?

3.6.2. En déduire une majoration $g^{(2)}{}_{maj}$ du module de $\vec{g}^{(2)}(M) = -\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{TM}\right)$ pour un point M voisin de la surface de la Terre en fonction de Ω et R_T. Faire l'application numérique et montrer que l'on peut négliger, en première approximation, $\vec{g}^{(2)}(M)$ devant $\vec{g}^{(0)}(M)$.

En réalité (figure 2) l'axe de rotation de la Terre est animé d'un mouvement de précession à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}'$ (période $T' \approx 26\times10^3$ ans de précession des équinoxes).

3.6.3. En déduire une majoration $g^{(3)}{}_{maj}$ du module de $\vec{g}^{(3)}(M) = -\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\overrightarrow{TM}$ pour un point M voisin de la surface de la Terre en fonction de Ω, Ω' et R_T. Faire l'application numérique et montrer que l'on peut négliger, en première approximation, $\vec{g}^{(3)}(M)$ devant $\vec{g}^{(0)}(M)$.

3.6.4. En tenant compte des différents ordres de grandeur précédents, réécrire l'équation fondamentale de la dynamique terrestre simplifiée.

3.7. Application : le pendule de Foucault

Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable attaché à un point P(0,0,H) du référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ tel que $H = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$, l'origine O étant prise à la surface de la Terre (figure 3). Une masse quasi ponctuelle m est attachée à l'extrémité libre M du fil. On donne pour les applications numériques : L≈67 m et m≈30 kg.

Dans toute la suite de la section 3.7. on supposera le champ de pesanteur uniforme et porté par la verticale ascendante Oz du lieu $\left(\vec{g} = -g\,\vec{u}_z\right)$ et on prendra g≈9,8 $m.s^{-2}$ pour les applications numériques. On note x, y, z les coordonnées du point M relativement au repère (O,x,y,z) attaché au référentiel Terrestre $\mathcal{R}_T$ (figure 3).

3.7.1. Exprimer la tension $\vec{T}_f$ du fil en fonction de $T_f = \left\|\vec{T}_f\right\|$, x, y, z, H et L.

3.7.2. En utilisant l'équation fondamentale de la dynamique terrestre simplifiée, montrer que les coordonnées (x,y,z) de M, $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ de ${}^{\mathcal{R}_T}\vec{v}(M)$ et $(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})$ de ${}^{\mathcal{R}_T}\vec{a}(M)$ vérifient le système d'équations différentielles suivant :

$$\ddot{x} = -\frac{T_f}{mL}x + 2\Omega\dot{y}\sin\lambda \qquad (1)$$

$$\ddot{y} = -\frac{T_f}{mL}y - 2\Omega\left(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda\right) \qquad (2)$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2871 - Wadifa Info - page 4/10

$$\ddot{z} = -g - \frac{T_f}{mL}(z - H) + 2\Omega\,\dot{y}\cos\lambda \qquad (3)$$

λ étant la latitude du lieu de l'expérience.

3.7.3. Montrer que dans le cadre de l'hypothèse des mouvements de faible amplitude, l'équation (3) ci-dessus impose $T_f \approx mg$.

3.7.4. En déduire un système de deux équations différentielles caractérisant la projection du mouvement de M dans le plan (xOy). Pour cela on négligera a priori le terme $\dot{z}\cos\lambda$ devant $\dot{x}\sin\lambda$ dans l'équation (2) ; cette hypothèse sera vérifiée a posteriori (section 3.7.14). On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Pour résoudre le système différentiel précédent (sous section 3.7.4.) on pose $\underline{\rho} = x + i\,y$, i étant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

3.7.5. Établir l'équation différentielle vérifiée par la variable complexe $\underline{\rho}$.

Afin de pouvoir résoudre l'équation différentielle satisfaite par $\underline{\rho}$ et déterminer la nature de la projection dans le plan (xOy) de la trajectoire du point M, on commence par déterminer les équations du mouvement dans le repère (O,x',y',z'). L'axe Oz' est confondu avec Oz. Le repère (O,x,y,z) tourne autour de Oz' à la vitesse angulaire constante $\omega = \Omega\sin\lambda$. Soit $\underline{\rho}' = x' + i\,y'$ où x' et y' désignent les coordonnées de M par rapport à (O,x'y'z').

3.7.6. Exprimer $\underline{\rho}'$ en fonction de $\underline{\rho}$, ω et du temps t.

3.7.7. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\rho}'$.

3.7.8. Par un calcul d'ordres de grandeur, vérifier qu'aux latitudes moyennes ($\lambda \approx 30°$), ω^2 est négligeable devant ω_0^2.

3.7.9. Donner alors la forme générale des solutions $\underline{\rho}'$.

On adopte les conditions initiales suivantes : à l'instant t = 0, $x = x_0$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = 0$.

3.7.10. En déduire alors $\underline{\rho}'(t)$ puis x'(t) et y'(t).

3.7.11. Montrer que dans le plan (x'Oy'), la trajectoire de M est une ellipse.

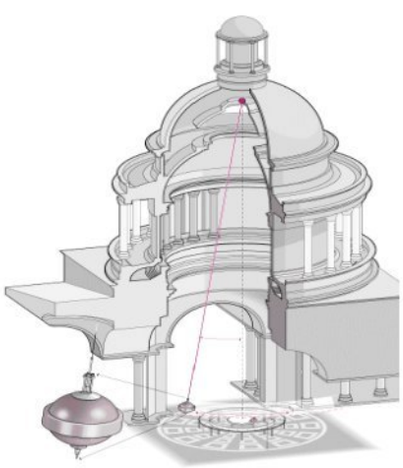
3.7.12. Exprimer son demi-grand axe a suivant Ox' et son demi-petit axe b suivant Oy' en fonction de x_0, ω et ω_0 et montrer que l'ellipse est très aplatie dans une direction que l'on précisera.

3.7.13. Déduire de ce qui précède la nature du mouvement de M relativement à $\mathcal{R}_T$.

3.7.14. L'approximation utilisée en 3.7.4. est-elle légitime ?

Lecture

« Vous êtes invités à venir voir tourner la terre ... », tels sont les mots, libellés dans un style un peu surréaliste et profanatoire, que le physicien Foucault utilisa en 1851 pour dire sa découverte et pour en rendre visible la démonstration sous la coupole du Panthéon à Paris (Voir Illustration).



3.7.15. De quelle découverte s'agit-il ?

3.7.16. Comment la démonstration de Foucault permet-elle de rendre compte du mouvement de la Terre ?

3.7.17. De quel mouvement de la Terre s'agit-il et par rapport à quel référentiel ?

3.7.18. Exprimer la période T' de rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault en fonction de T et λ et déterminer sa valeur numérique aux latitudes moyennes ($\lambda \approx 30°$ nord).

4ème Partie
Étude d'un gravimètre interférentiel absolu

La connaissance précise du champ de pesanteur intéresse des domaines divers des sciences de la Terre : géophysique, océanographie, météorologie, … Elle permet, entre autres, de mieux comprendre la structure interne du globe et d'apporter une contribution à la sismologie. Elle intervient aussi dans le calcul des trajectoires des satellites …

Le principe de fonctionnement des gravimètres absolus repose sur la chute libre dans le vide d'un corps de masse m pouvant être assimilé à un point matériel. Dans toute la suite on supposera le champ de pesanteur $\vec{g}$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2871 - Wadifa Info - page 5/10

uniforme et porté par la verticale ascendante Oz du lieu considéré $\left(\vec{g} = -g\,\vec{u}_z\right)$.

4.1. Chute libre dans le vide

Un point matériel mobile M de masse m est lancé dans le vide verticalement vers le haut en z=0 avec une vitesse initiale v_0 suffisante pour traverser deux plans horizontaux fictifs P_1 et P_2 de côtes respectives $z=z_1$ et $z=z_2$ ($z_2>z_1$).

Soient t_1 et t_2 les instants de passage de M respectivement par P_1 et P_2 lors du mouvement ascendant. Et soient t_3 et t_4 les instants de passage respectivement par P_2 puis par P_1 lors du mouvement descendant.

Dans toute la suite du problème, et sauf mention explicite du contraire, on supposera que le référentiel terrestre est galiléen.

4.1.1. Établir l'équation différentielle du mouvement de M et en déduire son équation horaire z(t).

4.1.2. Exprimer $\Delta_1T=t_4-t_1$ et $\Delta_2T=t_3-t_2$ en fonction de z_1, z_2, v_0 et g.

4.2. Étude de l'interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson est un interféromètre à deux ondes comportant (figure 4) :

- une lame semi-argentée selon l'une de ses faces (en gras sur la figure 4) et appelée séparatrice (L_s),
- deux miroirs plans, l'un $\mathcal{M}_1$ mobile en translation selon I_1y et l'autre $\mathcal{M}_2$ mobile en rotation autour de I_2y et I_2z,
- une lame compensatrice (L_c) parallèle à L_s.

L'épaisseur de la couche d'argent est telle que les faisceaux 1 (réfléchi par $\mathcal{M}_1$) et 2 (réfléchi par $\mathcal{M}_2$) ont sensiblement la même intensité à la sortie de l'interféromètre. On pose $d=d_2-d_1$ où les distances d_1 et d_2 sont telles que $d_1=I\,I_1$ et $d_2=I\,I_2$. L'appareil est supposé plongé dans l'air d'indice de réfraction $n\approx1$.

4.2.1. Expliquer brièvement en quelques phrases le rôle de la lame séparatrice L_s ainsi que celui de la lame compensatrice L_c, on pourra s'aider d'un schéma.

On supposera par la suite que tous les réglages préliminaires ont été effectués de sorte que l'on puisse :

- modéliser l'interféromètre par le schéma de la figure 5. La séparatrice S_p (semi-réfléchissante) est inclinée de 45° par rapport à l'axe OI et a une épaisseur nulle,
- considérer les deux miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ rigoureusement perpendiculaires entre eux.

On utilise comme source $\mathcal{S}$ une lampe à vapeur de mercure (Hg) centrée en O dont on sélectionne l'une des raies spectrales de sorte que dans cette étude on pourra considérer l'interféromètre de Michelson éclairé à l'aide d'une lumière monochromatique de longueur d'onde λ.

4.2.2. Comment parvient-on dans la pratique à sélectionner l'une des raies spectrales de la lampe utilisée ?

La source *étendue* constituée par la lampe au Mercure éclaire l'interféromètre de Michelson à l'aide d'un faisceau convergent de sorte que l'angle d'incidence par rapport à OI varie entre $-i_{max}$ et $+i_{max}$.

4.2.3. Représenter, à l'aide d'un schéma soigné, le cheminement à l'intérieur de l'interféromètre, d'un rayon lumineux issu de la source $\mathcal{S}$ et faisant un angle i avec l'axe OI. On représentera l'image $\mathcal{M}_2$' de $\mathcal{M}_2$ à travers la séparatrice S_p et on montrera graphiquement que tout se passe comme si les rayons lumineux qui interfèrent sont obtenus par réflexion d'un même rayon incident sur $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$'.

4.2.4. En déduire la différence de marche δ entre les deux rayons qui interfèrent en fonction de d et i.

4.2.5. Quel type de franges obtient-on ? Sont-elles localisées ? Si oui, où ?

On interpose à la sortie de l'interféromètre une lentille convergente L de distance focale image $f_i\approx1$ m et un écran E dans le plan focal image de la lentille L. On appelle p l'ordre d'interférence en un point quelconque de la figure d'interférence et p_0 sa valeur supposée entière au centre de la figure.

4.2.6. Donner l'expression de l'intensité lumineuse I sur l'écran E en fonction de δ et λ ; on notera I_0 l'intensité maximale.

4.2.7. Donner l'expression littérale des rayons des franges brillantes sur l'écran E en fonction de f_i, λ, d, p_0 et p. Exprimer les rayons R_1 et R_2 sur l'écran E pour les deux premières franges brillantes.

La lampe à vapeur de Mercure est remplacée par une lampe au Xénon haute pression émettant de la lumière blanche. Pour simplifier on supposera que l'intensité spectrale $I_\nu(\nu)=\dfrac{dI}{d\nu}$ de cette source est uniforme et vaut I_ν^0 dans l'intervalle de fréquence $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$.

4.2.8. Montrer que l'intensité totale enregistrée par un détecteur D placé au *foyer image* de L peut s'écrire sous la forme

$$I = I'_0\left(1+\frac{\sin\alpha\delta}{\alpha\delta}\cos\beta\delta\right).$$

Donner les expressions de α, β et δ en fonction de ν_1, ν_2, d et c_0 (célérité de la lumière dans le vide).

4.2.9. Exprimer α et β ainsi que le rapport β/α en fonction des longueurs d'onde limites du spectre visible λ_1 et λ_2. Donner la valeur numérique du rapport β/α après avoir rappelé celles de λ_1 et λ_2.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2871 - Wadifa Info - page 6/10

4.2.10. Tracer soigneusement la courbe représentative de I en fonction de δ et montrer en particulier que lorsque d varie autour d'une valeur que l'on précisera, le détecteur enregistre une frange brillante intense entourée de deux franges sombres et de deux franges claires moins intenses.

4.3. Gravimètre interférentiel absolu

On utilise un interféromètre de Michelson pour étudier le mouvement de chute libre dans le vide de l'un de ses deux miroirs. Le miroir $\mathcal{M}_1$ est ainsi remplacé par un « coin de cube » $\mathcal{C}_c$ ou « cataphote » que l'on assimile à un ensemble de trois miroirs plans $(\mathcal{M}_X,\mathcal{M}_Y,\mathcal{M}_Z)$ formant un trièdre trirectangle, les faces réfléchissantes étant tournées vers l'intérieur. Le centre du coin de cube $\mathcal{C}_c$ coïncide avec l'origine C du trièdre (figure 6).

D'autre part, le miroir $\mathcal{M}_2$ est remplacé par un ensemble de deux lames à faces parallèles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. Pour chacune de ces deux lames, une face est rendue semi-transparente par un dépôt d'argent représenté par un trait gras sur la figure 7. Les deux lames sont parallèles entre elles et distantes d'une distance d' très grande devant la longueur d'onde moyenne de la lumière utilisée pour éclairer le dispositif. On négligera les réflexions sur les surfaces non argentées de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ (figure 7).

4.3.1. Montrer qu'un rayon lumineux quelconque pénétrant dans le coin de cube en ressort parallèle à lui même après trois réflexions.

4.3.2. Quel intérêt peut-il y avoir à utiliser un tel coin de cube plutôt qu'un miroir plan classique ?

4.3.3. Une catapulte lance le coin de cube verticalement et vers le haut (selon CI) à t=0. Montrer que le détecteur enregistre deux maxima intenses aux instants t_1 et t_2 lors du mouvement ascendant du coin de cube et deux autres maxima aux instants t_3 et t_4 de la phase descendante du mouvement.

4.3.4. Montrer que la connaissance de $\Delta_1T=t_4-t_1$, $\Delta_2T=t_3-t_2$ et $d'=|IP_2-IP_1|$ permet de déterminer l'intensité g du champ de pesanteur au lieu de l'expérience. On pourra utiliser les résultats établis en 4.1.2.

4.3.5. Comment à l'aide d'une manipulation simple peut-on déterminer avec précision la distance $d'=|IP_2-IP_1|$ séparant les deux miroirs semi-transparents ?

4.3.6. Quel intérêt y a-t-il ici à utiliser la lumière blanche plutôt qu'une lumière quasi-monochromatique ?

4.4. Étude du système optoélectronique de détection

Le dispositif optique de la figure 7 étant toujours éclairé en lumière blanche, on se propose d'étudier le système de détection permettant de transformer le signal lumineux en un signal électrique exploitable.

Le système optoélectronique de détection est construit autour d'une photodiode selon le montage de la figure 8. La photodiode utilisée délivre un courant électrique d'intensité i reliée à la d.d.p. u_D aux bornes de la diode par :

$$i = I_s\left[\exp\left(\frac{u_D}{u_0}\right)-1\right]-I_{ph}\,.$$

$I_{ph}(>0)$ est l'intensité du photocourant délivré par la photodiode. I_{ph} est proportionnelle à l'intensité lumineuse I du signal lumineux reçu par la photodiode. On suppose l'amplificateur opérationnel de la figure 8 idéal et son fonctionnement linéaire.

Avant d'être traité par un dispositif électronique approprié, le signal est tout d'abord converti en une tension électrique u(t) à l'aide du montage de la figure 8.

4.4.1. Exprimer la tension u(t) en fonction de R et I_{ph}. En déduire l'expression de u(t) en fonction de $\delta(t)$, α et β. On désignera par $-2U_0$ ($U_0>0$) la valeur minimale de la tension u(t).

Afin de ne pas saturer le détecteur de seuil utilisé dans le montage de la figure 11, on doit éliminer la composante continue du signal u(t).

4.4.2. Quel type de traitement doit-on faire subir au signal u(t) afin d'éliminer sa composante continue ?

Pour éliminer la composante continue U_0, on propose d'utiliser le système électronique de la figure 9. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionne de manière linéaire.

4.4.3. Déterminer la fonction de transfert harmonique $\underline{H}=\dfrac{\underline{v}}{\underline{u}}$ de ce système. Montrer que cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{H}(j\omega)=H_0\frac{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+2m\,j\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Déterminer les expressions de H_0, m et ω_0 en fonction des paramètres du circuit.

4.4.4. Quels sont l'ordre et la nature de ce montage ?

4.4.5. On donne $10\times\log_{10}(3)=4{,}8$ où $\log_{10}$ désigne le logarithme en base 10. Déterminer l'expression de la pulsation de coupure ω_c du montage à −9,6 dB et donner sa valeur numérique lorsque $R_1=1{,}0\times10^5\,\Omega$ et $C_1=1{,}0\,\mu F$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2871 - Wadifa Info - page 7/10

4.4.6. Tracer l'allure du diagramme de Bode du gain de ce système.

On suppose que, mise à part U_0, les composantes du spectre de Fourier du signal u(t) sont toutes dans la bande passante du filtre précédent. On fait de plus l'approximation qui consiste à supposer que le filtre est idéal pour ces composantes.

4.4.7. Donner dans ces conditions l'expression de la tension v(t) obtenue en sortie du filtre.

On considère le cas où la différence de marche δ est une fonction monotone croissante du temps t.

4.4.8. Représenter l'allure du signal v(t).

On désire détecter le « pic » positif central du signal v(t). Pour cela on commence par *redresser* le signal à l'aide d'une diode sans seuil D_i que l'on modélisera par une diode idéale. Le montage utilisé est celui de la figure 10.

4.4.9. Représenter la caractéristique courant tension d'une diode sans seuil idéale. Comment peut-on modéliser une telle diode ?

4.4.10. Représenter l'allure du signal $v_R(t)$ aux bornes de la résistance R_2 en expliquant le comportement de la diode pour chaque phase du signal v(t).

L'écart d'amplitude entre le maximum central U_0 de $v_R(t)$ et les premiers maxima U_1 voisins est suffisant pour qu'un détecteur de seuil simple permette de détecter seulement le maximum central. On propose d'utiliser le montage de la figure 11, dont la sortie S est reliée à un système de comptage qui se déclenche automatiquement (début ou fin de comptage) sur un front ascendant de variation de $v_S(t)$ (passage de −15 V à +15 V). Les tensions de saturation de l'amplificateur opérationnel supposé idéal sont ±15 V.

La force électromotrice réglable U_S sert de tension de référence au comparateur.

4.4.11. Comment faut-il choisir U_S pour ne détecter que le pic central ?

4.4.12. Représenter la caractéristique de transfert $v_S = v_S(v_R)$ lorsque l'on décrit uniquement le pic central. On placera sur cette figure les tensions particulières U_S, U_0 et U_1.

4.4.13. Représenter de même l'évolution de v_S en fonction du temps lors de l'expérience décrite en 4.3. On indiquera en particulier les instants t_1, t_2, t_3 et t_4 ainsi que les durées $\Delta_1 T$ et $\Delta_2 T$.

Fin de l'épreuve

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2871 - Wadifa Info - page 8/10

Figures

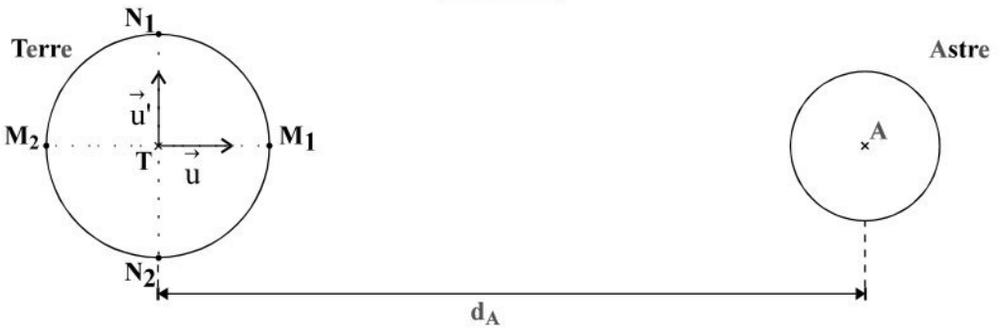


Figure 1

Figure 2

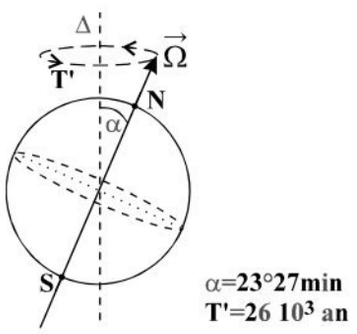


Figure 3

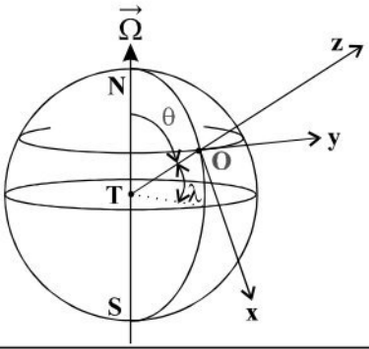


Figure 4

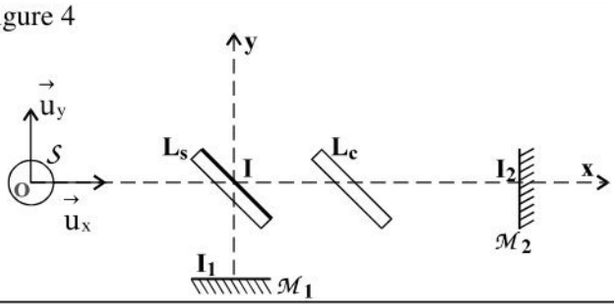


Figure 5

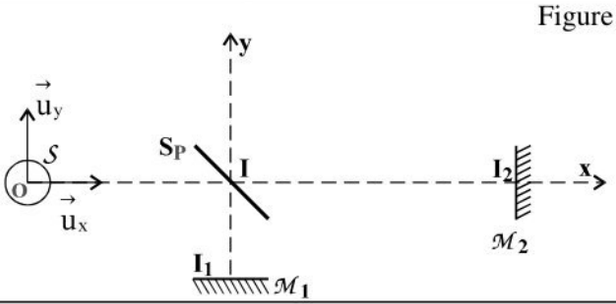


Figure 6

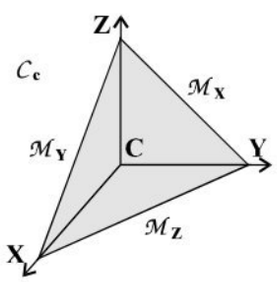


Figure 7

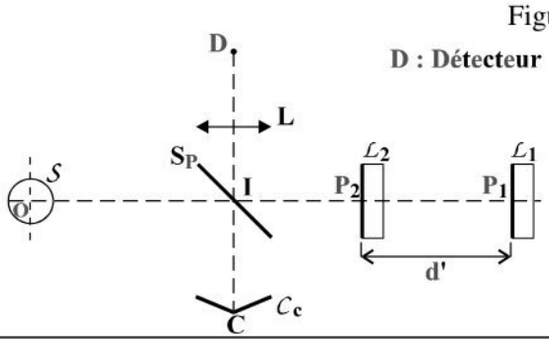


Figure 8

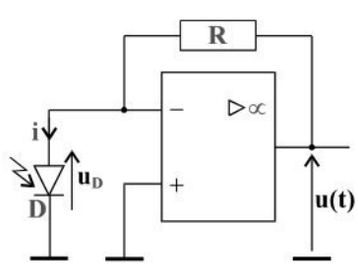


Figure 9

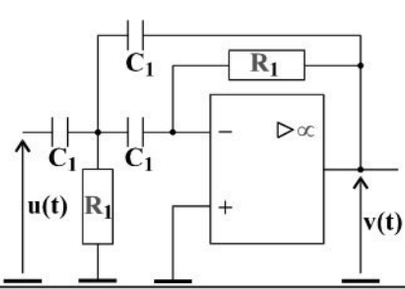


Figure 10

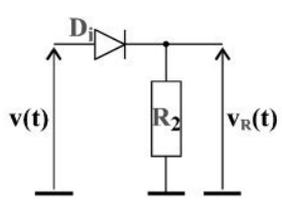
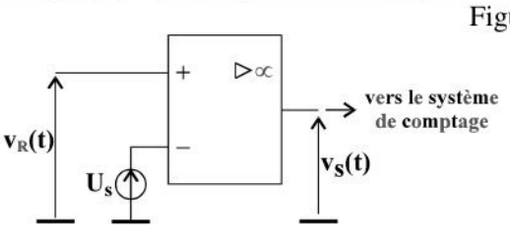


Figure 11



wadifa-info.com
نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2871 - Wadifa Info - page 9/10

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي - المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale – École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me