

Concours Commun Marocain	Session : 1996
Options : MM'-TA	Epreuve de Physique II
	Durée : 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Des points sont attribués chaque fois qu'un énoncé de théorème ou une définition sont exigés. Une phrase ou deux sont donc demandée(s) au candidat, le correcteur ne pouvant se contenter d'une formule comme réponse à ce genre de question.

MECANIQUE

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une tige cylindrique, rigide homogène de masse m , de longueur L , est considérée comme filiforme (r , rayon de son cercle de base est tel que $r \ll L$). Elle se déplace dans le plan vertical des figures.

A.1. Donner l'expression de son moment d'inertie par rapport :

- a) à un axe qui lui est orthogonal passant par son centre d'inertie ;
- b) à un axe qui lui est orthogonal passant par une de ses extrémités.

A.2. L'extrémité A de cette tige AB repose sur un plan horizontal sans frottement. La tige est placée initialement verticalement. On la lâche et cet équilibre instable est détruit, si bien qu'à un instant ultérieur t , AB fait un angle θ avec l'horizontal Ax (figure 1).

a) Que pouvez-vous dire de la direction et du sens de la force exercée par le sol sur l'extrémité A de la

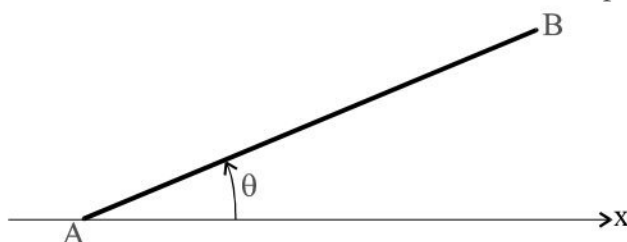


Figure 1

tige ?

b) Préciser le mouvement de son centre d'inertie G.

A.3. La tige AB est posée en son milieu O sur un support (genre "couteau" de balance) dont l'arête horizontale Oz est perpendiculaire au plan de la figure 2.

On désigne par f le coefficient de frottement entre la tige et le support.

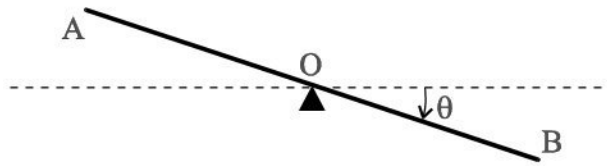


Figure 2

- Soient T et N les composantes tangentielle et normale de l'action en O du support sur la tige. Exprimer les en fonction de θ , m et g en supposant qu'il n'y a pas de glissement en O .
- Enoncer la loi de frottement de Coulomb et donner la valeur θ_1 de θ à partir de laquelle la tige glisse.
- Si on communique à la tige AB une vitesse angulaire initiale ω_0 à partir de la position initiale $\theta_0=0$, comment évolue θ au cours du temps avant que le glissement commence ?

Partie B

Une tige (T) filiforme de longueur $OB=2L$ est formée par deux tiges homogènes (T_1) et (T_2) similaires à la tige précédente, de même longueur $OA=AB=L$ et de masses respectives m_1 et $m_2=5m_1$. Elles sont soudées en A dans le prolongement l'une de l'autre. Soit $M=6m_1$ sa masse totale. (T) est mobile sans frottement dans le plan xOy vertical autour d'une articulation parfaite d'axe $z'z$ passant par l'extrémité O (figure 3). Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est dirigé selon Ox vertical : $\vec{g} = g \vec{i}$.

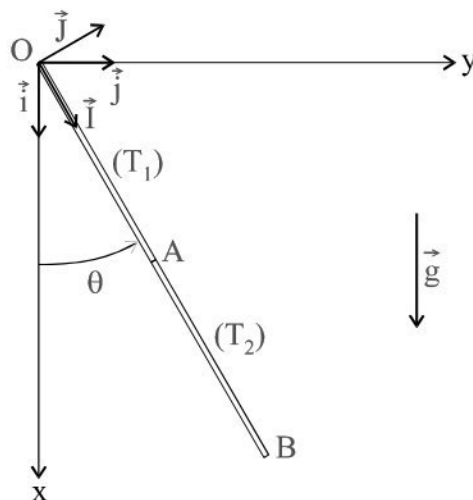


Figure 3

Le mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La position est définie par l'angle $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OB})$. Les grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base mobile $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \vec{k})$, $\vec{i}$ étant le vecteur unitaire de OB et $\vec{k}$ celui de Oz (voir figure 3).

B.1. Détermination des éléments d'inertie et cinétiques de (T)

B.1.1. Soit G le centre de masse de (T) . On pose : $a=OG=\alpha L$. Trouver la valeur numérique de α .

B.1.2. Soit J_Δ le moment d'inertie de (T) par rapport à Δ axe $z'Oz$. On pose $J_\Delta = \beta ML^2$.

Trouver la valeur numérique de β .

Trouver également le moment d'inertie J_{Δ_G} par rapport à l'axe Δ_G passant par G et parallèle à $z'Oz$.

Par la suite on appelle "constantes" : M, L, g, α et β ; et "variables" θ , les dérivées première $\frac{d\theta}{dt}$ et seconde $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ par rapport au temps.

B.1.3. Exprimer pour (T) en fonction des constantes et des variables :

- la résultante cinétique $\vec{P}$ et sa dérivée $\frac{d\vec{P}}{dt}$ (dans la base $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$),
- le moment cinétique scalaire L_Δ par rapport à Δ et $\frac{dL_\Delta}{dt}$,
- l'énergie cinétique E_c ,
- l'énergie potentielle de pesanteur E_p ($E_p=0$ pour $\theta=0$).

B.2. Equation du mouvement de la tige

La tige est abandonnée sans vitesse d'une position $\theta(0)=\theta_0$.

B.2.1. Enoncer le théorème du moment cinétique puis l'appliquer et en déduire l'équation (I) liant $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ à θ et aux constantes.

B.2.2. Enoncer le théorème de l'énergie cinétique (ou un théorème équivalent) puis l'appliquer et en déduire une équation liant $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ à θ et aux constantes. Retrouver l'équation du mouvement.

B.3. Calcul de la réaction d'axe

B.3.1. Enoncer le théorème du centre de masse (ou théorème de la résultante cinétique), l'appliquer à la tige, et en déduire, en fonction de θ seulement et des constantes, les composantes (R_X, R_Y) sur ($\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$) de la résultante des forces de liaison qu'exerce l'articulation sur la tige.

B.3.2. Calculer numériquement ces composantes quand $\theta = \frac{\pi}{2}$ puis $\theta=0$. On prendra : $\theta_0=\pi$;
 $M=12 \text{ kg}$; $L=1 \text{ m}$; $g=9,8 \text{ m.s}^{-2}$; $\alpha = \frac{4}{3}$ et $\beta=2$.

B.4. Calcul de la contrainte à la soudure des tiges

On veut évaluer le système des forces intérieures qu'exerce au cours du mouvement la tige T_1 sur la tige T_2 à l'endroit de la soudure, en A.

Cette action sera représentée par une force $\vec{T} = T_X \vec{I} + T_Y \vec{J}$ appliquée en A et un couple de moment $\vec{\Gamma}$ suivant le vecteur $\vec{K}=\vec{k}$.

Suivant une démarche analogue à la précédente, mais appliquée à la tige T_2 seule :

B.4.1. Appliquer le théorème de la résultante cinétique à la tige T_2 ;

B.4.2. Appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à un axe parallèle à Δ , passant par un point que l'on précisera ;

B.4.3. Déterminer $T_X(\theta)$ et $T_Y(\theta)$;

B.4.4. Déterminer $\Gamma(\theta)$;

B.4.5. Calculer les valeurs maximales prises par $|T_X|$ et $|T_Y|$, et comparer au poids m_2g de T_2 .

B.4.6. La soudure casse si $\|\vec{T}\|$ dépasse la limite de rupture supposée égale à $4m_2g$; se produit-elle pendant le mouvement ? Si oui, à quel endroit ?

THERMODYNAMIQUE



Figure 1

Le système étudié est une tige métallique OA horizontale, homogène, de masse m , fixée en O (figure 1). Le travail des forces de pression extérieure, exercées par l'air ambiant, sera supposé négligeable.

La tige est soumise à son extrémité A à une force $\vec{F}$ de direction OA. La force F est soit de traction, soit de compression.

Sur l'axe Ox, parallèle à OA, d'origine O, le sens positif est défini par le vecteur unitaire $\vec{i}$ de O vers A. On pose $\vec{F} = F \vec{i}$. Pour $F=0$, à la température T_0 , la longueur de la tige est L_0 . Pour une force F , à la température T , la longueur à l'équilibre est L .

On suppose que dans un certain domaine de F et de T l'équation d'état de la tige est donnée par la relation linéaire approchée :

$$L = L_0[1 + \lambda(T - T_0) + \mu F].$$

On suppose que les coefficients λ et μ sont constants (indépendants de T et F).

Pour une transformation élémentaire quasi-statique, la chaleur δQ_r reçue par la tige peut se mettre sous l'une des formes différentielles suivantes :

$$\delta Q_r = C_L dT + A dL \text{ ou } \delta Q_r = C_F dT + B dF.$$

C_L et A étant, a priori, fonctions des variables indépendantes T et L ; C_F et B , fonctions des variables indépendantes T et F .

Données : $m=0,05 \text{ kg}$; $\lambda=1,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $\mu=1,5 \cdot 10^{-6} \text{ N}^{-1}$; $L_0=2,0 \text{ m}$; à $T_0=273 \text{ K}$, la chaleur massique à longueur constante vaut $c=460 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

1.
 - 1.1. Donner une signification physique, ainsi que la nature intensive ou extensive des constantes λ , μ , C_L , C_F , A et B ; donner une unité pour les quatre derniers coefficients.
 - 1.2. Donner l'expression du travail algébrique élémentaire δW_r , reçu par la tige lors de cette transformation.
 - 1.3. En utilisant les variables indépendantes T et L , écrire les expressions différentielles dU et dS de l'énergie interne et de l'entropie de la tige.
 - 1.4. Montrer que $A = T \frac{\lambda}{\mu}$ et que C_L est indépendant de L .
 - 1.5. Exprimer C_L en fonction de m et c , puis la différence $C_F - C_L$ en fonction de λ , μ , L_0 et T .

Application numérique : Calculer C_L et $C_F - C_L$ à $T_0=273 \text{ K}$ et conclure.

Par la suite on supposera que C_F et C_L ne dépendent pas de T .

1.6. Etablir les expressions des fonctions énergie interne $U(T,L)$ et entropie $S(T,L)$ à des constantes près.

1.7. Montrer qu'on peut déduire les expressions approchées suivantes, pour T voisin de T_0 :

$$U(T,F) = C_F T + \frac{1}{2} \mu L_0 F^2 + \lambda L F T + \text{constante},$$

$$S(T,F) = C_F \frac{T}{T_0} + \lambda L_0 F + \text{constante}.$$

2. En utilisant les variables indépendantes T et F , et en introduisant une fonction enthalpie définie par $H=U-FL$, établir de même que $B=\lambda L_0 T$ et que C_F est indépendant de F . Retrouver les expressions de $U(T,F)$ et $S(T,F)$.

3.

3.1. La tige est soumise à une force de traction $F_1=1500$ N, sa température est $T_0=273$ K. Quelle est à l'équilibre la variation L_1-L_0 ? Faire l'application numérique.

3.2. On diminue progressivement la force de F_1 à 0, la transformation étant supposée **quasi-statique et adiabatique**. La température finale est T_2 et la longueur L_2 . Calculer T_2-T_0 et L_2-L_0 . Faire l'application numérique.

3.3. A partir du même état initial (T_0, L_1, F_1) , on annule brutalement la force appliquée, la tige étant en contact de l'air ambiant à la température $T_0=273$ K. Deux phases se succèdent alors :

- au cours de la première phase, brève, l'échange thermique avec le milieu ambiant est négligeable, la longueur passant de L_1 à L_3 et la température de T_0 à T_3 ;

- au cours d'une deuxième phase, l'équilibre thermique se réalise et la longueur revient à L_0 .

On admettra qu'à tout instant de la transformation, la température T de la tige reste uniforme et que l'équation d'état reste applicable.

a) Calculer T_3-T_0 et L_3-L_0 . Faire l'application numérique.

b) Calculer la quantité de chaleur reçue par la tige au cours de la transformation. Faire l'application numérique.

c) Calculer la variation d'entropie de l'univers {tige+milieu ambiant}

4. On se propose d'étudier la courbe donnant F en fonction de $\Delta L=L-L_0$ à température de la tige constante $F=f(\Delta L)$ représentée figure 2 :

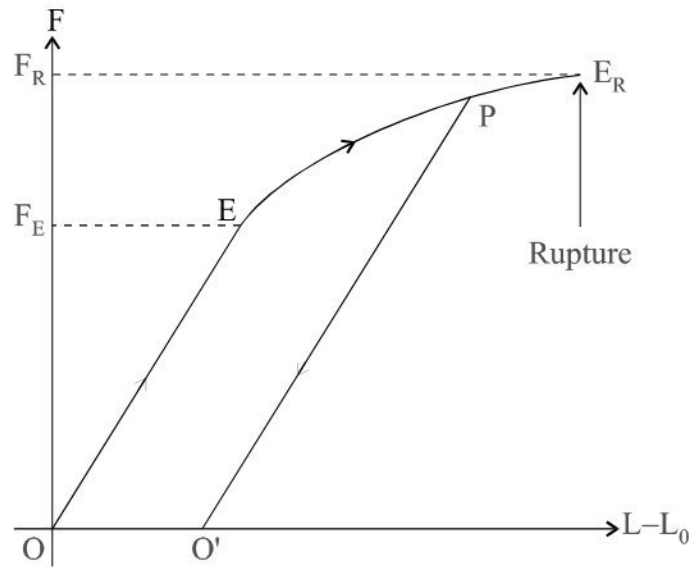


Figure 2

- la loi linéaire précédente est valable dans le domaine $[0, F_E]$,
- dans le domaine $[F_E, F_R]$, d'une part la relation n'est plus linéaire et d'autre part, si, après avoir augmenté la force de 0 à une valeur F_P du domaine $[F_E, F_R]$, on diminue ensuite progressivement la force, le point représentant l'état de la tige décrit la droite PO' . A partir de O' , par un nouvel accroissement de F , on peut atteindre P et décrire ensuite PE_R . En E_R la tige se rompt.

4.1. Supposons qu'on exerce, à température de la tige constante, une force $F < F_E$. La transformation est-elle réversible ? Justifier la réponse.

4.2.

a) Que représente OO' ?

b) La transformation $OEPO'$ est-elle réversible ? la transformation PO' l'est-elle ? Peut-on parler de transformation quasi-statique de E en P ? Justifier chaque réponse par un commentaire.

4.3. Peut-on toujours définir une équation d'état pour le fil ?