

Remarques importantes :

- L'épreuve est composée d'une seule page.
- Les réponses doivent être mentionnées sur la fiche de réponse donnée au candidat.
- Le candidat doit se concentrer sur le sujet d'examen sans poser aucune question concernant son contenu.

Electricité (QCM : Marquez la bonne réponse sur la fiche de réponse)

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans le schéma de la Figure 1, on utilise un supercondensateur de capacité très grande notée C et une source de courant idéale qui délivre une intensité constante $I = 100 \text{ A}$. Le supercondensateur est initialement déchargé ($u_C(t=0) = 0 \text{ V}$). A l'instant $t = 0$, on positionne l'interrupteur K en position 0. On charge alors le condensateur à courant constant. Un système d'enregistrement permet d'obtenir la mesure suivante : à $t = t_0 = 52 \text{ s}$, $u_C = U_0 = 2 \text{ V}$.

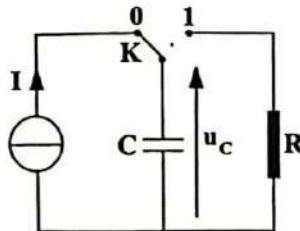


Figure 1

1. La capacité de ce condensateur vaut en Farads (F) :
2. L'énergie emmagasinée ξ_c par ce condensateur à l'instant t_0 vaut en kJ :

A l'instant t_0 , on bascule l'interrupteur K à la position 1. Ce condensateur se déchargera à travers une résistance $R = 9 \Omega$ jusqu'à l'instant t_1 où $u_C(t_1) = U_1 = 1,65 \text{ V}$. On pose : $\tau = RC$.

3. Durant la décharge de ce condensateur, l'expression de la tension $u_C(t)$ est égale à :
4. La constante de temps du circuit τ a pour valeur en heures :
5. La valeur de l'instant t_1 en secondes est d'environ :
6. L'énergie, notée ξ_R , dissipée par effet Joule dans la résistance R pendant l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ a pour valeur en kJ :

Partie B

Un supercondensateur est modélisé par l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance R_S et un condensateur de capacité C_S . On cherche à identifier de manière expérimentale les paramètres R_S et C_S de ce supercondensateur. Pour cela, à l'instant $t = 0$, on alimente le supercondensateur, initialement chargé sous la tension $u_0 = 1,55 \text{ V}$, par une source de courant d'intensité constante $I = 100 \text{ A}$ pendant la durée $\Delta t = 10 \text{ s}$ (Figure 2.a). On obtient le relevé de la tension $u_C = f(t)$ illustré dans la Figure 2.b (On donne : $u_1 = \frac{5}{3} \text{ V}$).

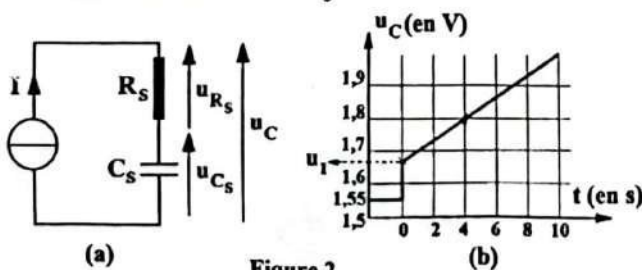


Figure 2

7. La tension $u_C(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :
8. En tenant compte des conditions initiales, l'expression de la tension $u_C(t)$ en fonction du temps est :
9. L'expression de la résistance R_S est :
10. La valeur de la résistance R_S en $m\Omega$ est environ :

11. La capacité C_S de ce supercondensateur en F vaut :

Partie C

On réalise un circuit électrique comportant un générateur de tension continue $E = 50 \text{ V}$, un interrupteur de courant K , trois condensateurs de même capacité C , une résistance R et une bobine d'inductance L et de résistance interne négligeable (Figure 3). A l'instant $t = 0 \text{ s}$, on positionne l'interrupteur K en position 0. On suppose que les condensateurs sont initialement chargés et les tensions à leurs bornes vérifient la relation $u_1(t=0) = u_2(t=0) = 5 \text{ V}$. A l'instant $t = 5 \text{ ms}$, un système de mesure permet de relever les grandeurs suivantes : $U(5 \text{ ms}) = 35,28 \text{ V}$ et $i_1(5 \text{ ms}) = 736 \text{ mA}$.

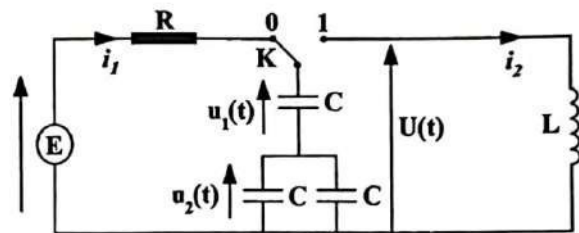


Figure 3

12. La capacité équivalente de l'association des trois condensateurs est :
13. L'équation différentielle vérifiée par $U(t)$ s'écrit sous la forme : $\alpha E = RC \frac{dU(t)}{dt} + \beta U(t)$. Le couple (α, β) a pour valeur :
14. La solution de l'équation différentielle précédente s'exprime comme suit : $U(t) = A - B e^{-\frac{t}{\tau}}$ où τ est la constante de temps du circuit. Le couple (A, B) a pour valeur en Volts :
15. La valeur de la résistance R en Ω est :
16. La valeur de la capacité C en μF est :
17. En tenant compte des conditions initiales, la tension $u_1(t)$ s'exprime en fonction de $U(t)$ comme suit : $u_1(t) = \lambda (U(t) + \gamma)$. Le couple (λ, γ) a pour valeur :
18. L'expression de la tension $u_2(t)$ en fonction de $U(t)$ est égale à :
19. Au bout d'un temps très supérieur à la constante de temps τ , l'énergie emmagasinée par le condensateur C soumis à la tension $u_1(t)$ vaut en mJ :
20. Le courant $i_1(t)$ s'exprime comme suit : $i_1(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$. Le couple (I_0, τ) a pour expression :
21. Le couple (I_0, τ) a pour valeur :

Après un temps très long, on bascule l'interrupteur K de la position 0 à la position 1 à un instant considéré comme origine du temps.

22. La tension $U(t)$ obéit à l'équation différentielle suivante : $\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \mu U(t) = 0$. L'expression de μ est :
23. Un système d'enregistrement permet de déterminer l'expression du courant établi dans le circuit comme suit : $i_2(t) = 2,5 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$ en A où T_0 est la période propre des oscillations dans le circuit.

La valeur de l'inductance L en mH est :

24. La période T_0 des oscillations qui prennent naissance dans le circuit est en secondes :
25. L'énergie totale ξ_t du circuit en mJ est :

Mécanique

On suppose que l'accélération de la pesanteur est constante et égale à $g = 10 \text{ m/s}^2$, dirigée vers le bas.

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

Rédaction : On écrit seulement le résultat final sur la fiche de réponse.

Partie A

Un corps ponctuel M de masse $m = 0,2 \text{ kg}$ est lancé, à $t = 0$, vers le haut depuis le point O (pris comme origine d'un axe (Ox) orienté vers le haut) avec une vitesse initiale verticale de norme $V_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ et arrive jusqu'à un point A puis redescend. On néglige les frottements. **Donner les valeurs numériques de :**

26. La hauteur de montée $h = OA$ (en m).

27. La norme V'_0 (en m.s^{-1}) de la vitesse de M quand il repasse par le point O .

28. La durée Δt (en s) d'allée retour sur le trajet (OAO) .

On reprend l'énoncé précédent et on suppose qu'en plus du poids, la masse ponctuelle subit une force de frottement verticale qui s'oppose au vecteur vitesse et d'intensité constante : $f = 0,5 \text{ N}$. **Donner :**

29. La valeur numérique de la hauteur de montée $h = OA$ (en m).

30. L'expression de la norme V'_0 de la vitesse de M quand il repasse par le point O , en fonction m, g, f et V_0 .

31. La valeur numérique de la durée Δt (en s) d'allée sur le trajet (OA) .

Partie B

Un point matériel M se déplace sans frottements à l'intérieur d'une gouttière terminée par un cercle de rayon a . Il est lâché en A , d'une hauteur h , sans vitesse initiale (Figure 4).

32. Exprimer la norme V_M de la vitesse du point M lorsqu'il est à l'intérieur du cercle en fonction de a, h, g et θ .

33. Déterminer l'intensité R de la réaction exercée par le support circulaire sur le point matériel en fonction de m, a, h, g et θ .

34. De quelle hauteur $h_{\min}$ (exprimée en fonction de a) doit-on lâcher le point matériel M sans vitesse initiale en A pour qu'il arrive jusqu'au point B le plus haut du cercle ($\theta = \pi$) ? (Indication : l'intensité R doit rester positive pour maintenir le contact entre M et le cercle).

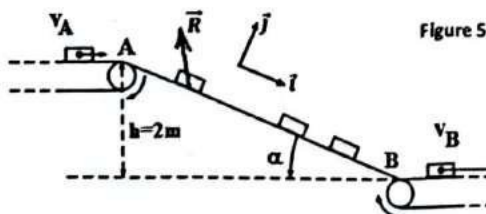
35. Pour $h = h_{\min}$, donner l'expression de la norme V_B de la vitesse en B ($\theta = \pi$) en fonction de a et g .

36. Pour $h = h_{\min}$, donner, en fonction de m et g , l'expression de l'intensité R de la réaction du support au point I d'entrée du cercle ($\theta = 0$).

QCM : Marquez la bonne réponse sur la fiche de réponse.

Partie C

Étudions un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal de la figure 5. Les colis sont déchargés par un tapis roulant à la vitesse $V_A = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$, puis glissent ensuite sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale. Ils sont ensuite pris en charge au niveau du point B par un nouveau tapis roulant qui avance à la vitesse $V_B = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$.



On se propose de déterminer l'angle α pour que le convoyeur fonctionne correctement, c'est-à-dire pour que les colis arrivent en B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.

En plus de son poids, Le colis de masse m subit par le plan incliné une force $\vec{R} = -T\vec{i} + N\vec{j}$ avec $T = fN$ où $f = 0,4$ désigne le coefficient de frottement. On note $\vec{\gamma} = \gamma\vec{i}$ l'accélération d'un colis sur le trajet AB .

37. L'expression de γ est :

38. Le travail de la réaction $\vec{R}$ sur le trajet AB est :

39. L'expression de $\tan(\alpha)$ est :

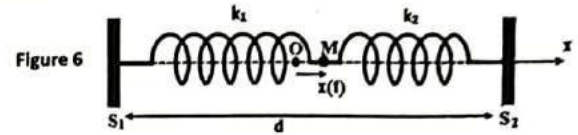
40. La valeur numérique de l'angle α est environ :

Partie D

Les sous parties D.1 et D.2 sont indépendantes.

D.1) Un point matériel M de masse m est susceptible de se déplacer sans frottements sur un axe horizontal. Il est soumis à l'action de 2 ressorts de même longueur à vide $l_0 = 20 \text{ cm}$ et de constantes de raideur différentes k_1 et k_2 . Les autres extrémités des ressorts sont attachées à deux supports fixes (S_1) et (S_2) distants de d (voir Figure 6).

On donne : $m = 4 \text{ kg}$; $k_1 = 100 \text{ N/m}$; $k_2 = 300 \text{ N/m}$ et $d = 60 \text{ cm}$. On choisit la position d'équilibre de M comme origine O de l'axe (Ox) .



41. Les longueurs (l_{e1}, l_{e2}) des 2 ressorts à l'équilibre sont (en cm) :

On écarte M de sa position d'équilibre jusqu'à la position d'abscisse $x_m > 0$ puis on le lâche à $t = 0$ sans vitesse initiale. A tout instant t , le point matériel M est repéré par son abscisse $x(t)$ (figure 6). On choisit la position du repos de chaque ressort (ressort n'est ni allongé ni comprimé) comme origine de l'énergie potentielle élastique et on pose $E_0 = \frac{1}{2}k_1(l_{e1} - l_0)^2$.

42. L'énergie potentielle élastique totale du point matériel M pour une position d'abscisse $x(t)$ s'écrit : $E_{Pe} = \frac{1}{2}\alpha x^2 + (1 + \beta)E_0$. Le couple (α, β) est :

43. L'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'abscisse $x(t)$ de M sur (Ox) s'écrit : $m\ddot{x} + \lambda x = 0$. Le coefficient λ est égal à :

44. Sachant que la norme de la vitesse de M quand il passe par O est V_0 , l'élongation maximale x_m de $x(t)$ s'écrit : $x_m = \mu V_0$. La valeur numérique de μ est :

D.2) On considère le système illustré dans la Figure 7 où le point matériel M de masse m est astreint à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon a . Le point M est attaché à un ressort (k, l_0) dont l'autre extrémité est fixée en O' ($OO' = a$). le point M est repéré par l'angle $\theta = (Ox, OM)$.

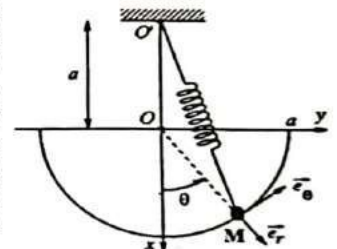


Figure 7

Pour une position θ de M , on admet que :

- la longueur du ressort est $l = O'M = 2a \cos(\frac{\theta}{2})$

- L'angle $\widehat{OMO'} = \frac{\theta}{2}$

Pour simplifier le problème, on pose :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} ; \frac{g}{a} = \frac{\omega^2}{2} \text{ et } \frac{l_0}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

45. L'accélération du point matériel M s'écrit : $\vec{a}(M) = c\dot{\theta}^2\vec{e}_r + d\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$. Le couple (c, d) est :

46. L'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ s'écrit : $\ddot{\theta} = \omega^2 \left(\alpha \cos(\frac{\theta}{2}) + \beta \right) \sin(\frac{\theta}{2})$. Le couple (α, β) est :

47. On s'intéresse au cas des petits angles ($\theta \ll 1$). On rappelle qu'en cas de petits angles $u \ll 1$ on a : $\sin(u) \approx u$ et $\cos(u) \approx 1$. L'équation différentielle précédente se simplifie en : $\ddot{\theta} = \eta\omega^2\theta$. Le coefficient η est égal à :

48. Peut-on envisager, en cas de petits angles, une solution sinusoïdale $\theta(t)$ autour de la position ($\theta = 0$) ?