L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière ECT, comporte 4 pages.
L'usage de tout appareil électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Problème 1

Calcul des puissances d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et application à l'étude d'un système de trois suites réelles simultanément récurrentes

Dans ce problème, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3 et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.. On considère les matrices éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix},\quad Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

1ère Partie
Deux premières méthodes de calcul des puissances de la matrice A

1.1. Calculs préliminaires

1.1.1. Vérifier que $A = J + 3I_3$.

1.1.2. Calculer J^2 et l'exprimer en fonction de J.

1.1.3. En déduire que $A^2 = 9A - 18I_3$.

1.2. Première méthode de calcul des puissances de la matrice A

1.2.1. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $J^n = 3^{n-1}J$.

1.2.2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$A^n = 3^{n-1}(2^n - 1)A + 2.3^n(1 - 2^{n-1})I_3.$$

1.2.3. Calcul de coefficients binomiaux avec Python

(i) Écrire une fonction `factorielle(m)` prenant en entrée un entier $m \in \mathbb{N}$ et renvoyant sa factorielle.

(ii) Écrire une fonction `binome(n,p)` prenant en entrée un couple (n,p) d'entiers naturels, avec $p \leqslant n$, et renvoyant la valeur de l'entier $\binom{n}{p}$. *On pourra faire appel à la fonction* `factorielle(.)`.

1.3. Deuxième méthode de calcul des puissances de la matrice A

On considère les deux suites réelles $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ définies par la donnée de $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$ et les relations :

$$\begin{cases}\alpha_{n+1} = 9\alpha_n + \beta_n\\ \beta_{n+1} = -18\alpha_n\end{cases}.$$

1.3.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \alpha_{n+1} - 3\alpha_n = 6\alpha_n + \beta_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison 6 puis exprimer u_n en fonction de n. *On justifiera que* $u_1 = 6$.

1.3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \beta_{n+1} - 6\beta_n = -6(3\alpha_n + \beta_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison 3 puis exprimer v_n en fonction de n.

1.3.3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = 3^{n-1}(2^n - 1)$ et $\beta_n = 2.3^n(1 - 2^{n-1})$.

1.3.4. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_n$.

Scanned with CamScanner
wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2534 - Wadifa Info - page 1/5

2ème Partie
Diagonalisation de A et troisième méthode de calcul de ses puissances

On rappelle que $A^2 = 9A - 18I_3$.

2.1. Un polynôme annulateur de la matrice A et conséquence

2.1.1. Vérifier que le polynôme $X^2 - 9X + 18$ est annulateur de A, puis en déterminer les racines.

2.1.2. En déduire des valeurs propres possibles pour la matrice A.

2.2. Des calculs matriciels utiles et détermination des valeurs propres de A

2.2.1. Calculer le produit matriciel $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ en fonction du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Que-peut-on en déduire ?

2.2.2. Vérifier que $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A. À quelle valeur propre de A sont-ils associés ?

2.3. Inversibilité et inverse de P

2.3.1. Calculer le produit matriciel PQ.

2.3.2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser son inverse P^{-1}.

2.4. Relation entre les puissances des matrices A et D

2.4.1. En faisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel k, $D^k = \begin{pmatrix}6^k & 0 & 0\\0 & 3^k & 0\\0 & 0 & 3^k\end{pmatrix}$.

2.4.2. Calculer les produits matriciels PD et AP. Que peut-on en déduire vis-à-vis de la matrice A ?

2.4.3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $A^k = PD^kP^{-1}$. *Ceci fourni une troisième méthode pour le calcul des puissances de A.*

3ème Partie
Application à l'étude d'un système de suites simultanément récurrentes

On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 0$, $y_0 = z_0 = 1$ et les relations de récurrence : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{7}(4x_n + y_n + z_n)\\ y_{n+1} = \frac{1}{7}(x_n + 4y_n + z_n)\\ z_{n+1} = \frac{1}{7}(x_n + y_n + 4z_n)\end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$.

3.1. Vérifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = \frac{1}{7}AX_n$.

3.2. En déduire, à l'aide d'une récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = \frac{1}{7^n}A^nX_0$.

3.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le produit matriciel AX_0, puis en utilisant l'expression de la matrice A^n, obtenue à la question **1.2.2.** de la première partie, déterminer les expressions de x_n , y_n et z_n en fonction de n.

3.4. Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leur limite.

Problème 2

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si X est une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on lui associe la fonction numérique de la variable réelle

$$M_X : t \longmapsto E(e^{tX})$$

où, pour tout réel u, $E(e^{uX})$ désigne l'espérance, lorsqu'elle existe, de la variable aléatoire e^{uX}.

On rappelle le théorème de transfert à une variable suivant :

« Si X est une variable aléatoire réelle de loi discrète (caractérisée par les (x_k, p_k)) et si $Y = g(X)$, alors sous réserve de convergence absolue on a : $E(Y) = \sum_k g(x_k)p_k$. »

Scanned with CamScanner
wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2534 - Wadifa Info - page 2/5

1ère Partie
Exemples de calculs de M_X et quelques propriétés

1.1. Expression et quelques propriétés de M_X dans le cas d'une loi discrète finie

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, \ldots, x_r$ avec les probabilités non nulles respectives $p_1, \ldots, p_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$; c'est-à-dire que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, avec $r \geqslant 1$, et $P(X = x_k) = p_k > 0$, pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$.

1.1.1. Montrer que la fonction M_X est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=1}^{r} p_k e^{x_k t}.$$

1.1.2. Justifier que la fonction M_X est strictement positive et préciser la valeur de $M_X(0)$.

1.1.3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k, la fonction M_X est $k-$fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$M_X^{(k)}(0) = E(X^k).$$

1.2. Deux premiers exemples de calcul de M_X

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1.2.1. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Montrer que M_X est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = 1 + p(e^t - 1).$$

1.2.2. On suppose que X suit une loi de binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Montrer que M_X est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = \left(1 + p(e^t - 1)\right)^n.$$

1.3. Calcul de M_X dans le cas de deux lois discrètes infinies usuelles

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. on note ln la fonction logarithme népérien.

1.3.1. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que M_X est définie sur l'intervalle ouvert $]-\infty, -\ln(1-p)[$ et que

$$\forall t < -\ln(1-p), \quad M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}.$$

1.3.2. On suppose que X suit une loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que M_X est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

1.4. Cas d'une somme de variables aléatoires

Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. Soient X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la même loi que la variable aléatoire X. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1.4.1. On suppose ici que $n = 2$ et que $u \in \mathbb{R}$ est un élément du domaine de définition de la fonction M_X. Montrer que $M_{S_2}(u)$ existe et que $M_{S_2}(u) = \left(M_X(u)\right)^2$. On justifiera la réponse en citant le résultat utilisé.

1.4.2. Montrer plus généralement que si $u \in \mathbb{R}$ est un élément du domaine de définition de la fonction M_X, alors $M_{S_n}(u)$ existe et on a $M_{S_n}(u) = \left(M_X(u)\right)^n$.

1.5. Une inégalité

On reprend les notations de la section **1.4.** précédente.

1.5.1. Soit a un réel et $u \in]0, +\infty[$. Comparer les événements $\left\{\omega \in \Omega\,;\, \frac{S_n(\omega)}{n} \geqslant a\right\}$ et $\left\{\omega \in \Omega\,;\, e^{uS_n(\omega)} \geqslant e^{nau}\right\}$.

1.5.2. Montrer que si $u \in]0, +\infty[$ est un élément du domaine de définition de M_X, alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) = P\left(e^{uS_n} \geqslant e^{nau}\right) \leqslant \left(e^{-au} M_X(u)\right)^n.$$

On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

Scanned with CamScanner
wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2534 - Wadifa Info - page 3/5

2ème Partie
Quelques résultats utiles d'analyse

2.1. Une inégalité de convexité

2.1.1. Montrer que la fonction $x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2.1.2. En déduire que si $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1,1]$ alors,

$$e^{xt} \leqslant \frac{1+x}{2}\, e^t + \frac{1-x}{2}\, e^{-t}.$$

2.2. Une autre inégalité utile

On rappelle que pour tout réel x, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et on a : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2.2.1. Justifier que pour tout réel t, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$ est convergente de somme $e^{\frac{t^2}{2}}$.

2.2.2. Montrer que pour tout réel t, $\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$.

2.2.3. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2^k k! \leqslant (2k)!$.

2.2.4. En déduire que pour tout réel t, $\frac{e^t + e^{-t}}{2} \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.

3ème Partie
Variables aléatoires sous-gaussiennes

Soit X une variable aléatoire discrete définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $\alpha > 0$; on dit que X est α-sous-gaussienne si la fonction M_X est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et si de plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = E(e^{tX}) \leqslant e^{\frac{\alpha^2 t^2}{2}}.$$

4.1. Un exemple

On suppose ici que la variable aléatoire X est telle que $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et que $P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{2}$.

4.1.1. Montrer que la fonction M_X est définie sur $\mathbb{R}$ et exprimer $M_X(t)$ pour tout réel t.

4.1.2. Montrer que M_X est 1-sous-gaussienne. *On pourra utiliser la question* **2.2.4.** *de la deuxième partie.*

4.1.3. On considère un entier naturel $n \geqslant 1$ et des variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la même loi que la variable aléatoire X.

(i) Montrer que pour tout réel t et tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, la variable aléatoire $e^{t(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n)}$ admet une espérance et que

$$E(e^{t(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)}) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{-t\,a_k} + e^{t\,a_k}}{2}\right).$$

(ii) En déduire que si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, alors la variable aléatoire $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ est α-sous-gaussienne, avec $\alpha = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$.

4.2.

On revient au cas général et on suppose ici que la variable aléatoire X est centrée, c'est à dire que $E(X) = 0$.

4.2.1. Montrer que si X est bornée par 1, alors elle est 1-sous-gaussienne. *On pourra utiliser* **2.1.2.** *et* **2.2.4.**

4.2.2. En déduire que si X est bornée par $\alpha > 0$, alors elle est α-sous-gaussienne.

4.3. Une inégalité

Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne, avec $\alpha > 0$, et soit $\lambda > 0$.

4.3.1. Montrer que, pour tout $t > 0$, $P(X \geqslant \lambda) = P(e^{tX} \geqslant e^{t\lambda})$.

4.3.2. Montrer que, pour tout $t > 0$, $P(X \geqslant \lambda) \leqslant e^{\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda}$.

4.3.3. En déduire que $P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2e^{-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}}$. *On pourra étudier et minimiser la fonction $x \longmapsto \frac{\alpha^2}{2}x^2 - \lambda x$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.*

Fin de l'épreuve

Scanned with CamScanner
wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2534 - Wadifa Info - page 4/5

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج المدارس الوطنية للتجارة والتسيير ENCG 2009 - اختبار الأهلية للتكوين في

Modèle concours d'accès – Réseau des Écoles Nationales de Commerce et de Gestion (ENCG) 2009 – Test d'Admissibilité à

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1185

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me