

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2010
École Supérieure des Industries du Textile et de l'Habillement
ESITH

Concours National Commun
d'Admission aux
Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées
Session 2010

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

**L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière BCPST,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .**

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les **références** des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à p lignes et q colonnes ; si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, tM désigne la matrice transposée de M et $\text{rg}(M)$ son rang.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

1^{ère} partie

Ici on prend $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et u désigne l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se donne $X_0 \in E$ et on définit la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E par

$$X_{n+1} = MX_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$ et on considère un vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$ pour lequel on associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = {}^tX_n V, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Pour tout entier naturel n , exprimer a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
2. Montrer que si V est un vecteur propre de tM associé à la valeur propre λ alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. Quelle est sa raison ? (On calculera v_{n+1} en fonction de v_n , $n \in \mathbb{N}$.)
3. **Application**

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $(a_0, b_0, c_0) = (1, 0, 0)$ et pour tout entier $n \geq 0$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 15b_n + 3c_n \\ b_{n+1} = a_n - 4b_n + c_n \\ c_{n+1} = 2a_n - 10b_n + 3c_n \end{cases}$$

- (a) Préciser X_0 ainsi que la matrice M associée à ces suites.
- (b) Montrer que la matrice tM possède une unique valeur propre et la préciser.
- (c) Déterminer le sous espace propre associé ; on le notera F .
- (d) Préciser la dimension et donner une base de F .
- (e) En considérant deux vecteurs propres linéairement indépendant V_1 et V_2 de la matrice tM et en étudiant les suites $(v_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui leur sont respectivement associées, trouver les expressions des termes d'indice n des trois suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n .

2^{ème} partie

Dans cette partie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$; on rappelle que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que 1 est valeur propre de f .
 (b) Quel est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1. Quelle est sa dimension ?
 (c) Donner un vecteur propre ε_1 de f associé à la valeur propre 1 et dont la troisième composante est égale à 1.
2. (a) Déterminer toutes les valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.
 (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. (a) Montrer qu'il existe un unique vecteur ε_2 de troisième composante égale à 0 tel que $f(\varepsilon_2) - \varepsilon_2 = \varepsilon_1$ et le déterminer.
 (b) Vérifier que ε_1 et ε_2 sont des éléments de $\text{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})^2$.
 (c) Déterminer ε_3 élément de $\text{Ker}(f + 3id_{\mathbb{R}^3})$ dont la troisième composante vaut 1.
4. (a) Montrer que $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 (b) Écrire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
 (c) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}_1$ et calculer P^{-1} .
 (d) Exprimer alors A à l'aide des matrices B , P et P^{-1} .
5. On considère trois fonctions u , v et w de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles

$$(S) \begin{cases} u'(t) = -u(t) + 5v(t) - 3w(t) \\ v'(t) = u(t) \\ w'(t) = v(t) \end{cases}$$

- (a) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(t) = (u(t), v(t), w(t)).$$

- i. Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = (u'(t), v'(t), w'(t))$.
- ii. Montrer que le système (S) équivaut à l'équation différentielle

$$(E) \quad \varphi'(t) = f(\varphi(t)).$$

- (b) On écrit $\varphi(t) = x(t)\varepsilon_1 + y(t)\varepsilon_2 + z(t)\varepsilon_3$.

Montrer que l'équation différentielle (E) équivaut au système

$$(S') \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = -3z(t) \end{cases}$$

- (c) On suppose que $u(0) = v(0) = 0$ et que $w(0) = 1$; calculer alors $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$.

- (d) Résoudre le système (S') avec les conditions initiales $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ trouvées à la question précédente.
- (e) En déduire la solution de (S) vérifiant les conditions initiales $u(0) = v(0) = 0$ et $w(0) = 1$.

3^{ème} partie

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et u un endomorphisme de E . La composée de deux endomorphismes f et g de E est notée fg au lieu de $f \circ g$.

On suppose que l'endomorphisme u possède deux valeurs propres λ et μ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \neq \mu$, et on admet que $(u - \lambda \text{id}_E)^2(u - \mu \text{id}_E) = 0$; on note E_λ et E_μ les sous-espaces propres de u associés respectivement à λ et μ , puis on pose $v = (u - \lambda \text{id}_E)^2$ et $w = u - \mu \text{id}_E$.

1. (a) Exprimer v en fonction de u^2 , u et id_E .
 (b) Si $x \in \text{Ker } w$, calculer $v(x)$ en fonction de x .
 (c) En déduire que $\text{Ker } v \cap \text{Ker } w = \{0\}$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in E$, $v(x) \in \text{Ker } w$ et que $w(x) \in \text{Ker } v$.
 (b) Effectuer la division euclidienne du polynôme $(X - \lambda)^2$ par le polynôme $X - \mu$ puis montrer que $E = \text{Ker } v \oplus \text{Ker } w$.
 (c) Donner la dimension de $\text{Ker } w$ et en déduire celle de $\text{Ker } v$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la dimension du sous-espace vectoriel E_λ pour que u soit diagonalisable.

Dans la suite de cette partie, on suppose l'endomorphisme u **non diagonalisable**.

4. Justifier que E_λ est un sous-espace vectoriel strict de $\text{Ker } v$.
5. On choisit un vecteur $e_2 \in \text{Ker } v \setminus E_\lambda$ et on pose $e_1 = (u - \lambda \text{id}_E)(e_2)$; soit enfin e_3 un vecteur non nul de $\text{Ker } w$.
 (a) Calculer $u(e_1)$ et montrer que la famille (e_1, e_2) est une base de $\text{Ker } v$.
 (b) Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E et écrire la matrice de u dans cette base.

6. **Un exemple :** On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer les valeurs propres de f .
- (b) Déterminer les sous-espaces propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
- (c) Calculer la matrice $(A - I_3)^2$ et donner une équation et la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Ker } (f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2$.
- (d) On pose $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_1 = (f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(e_2)$.
 i. Trouver un vecteur propre e_3 de f dont la deuxième composante est égale à 1 et justifier que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
 ii. Écrire la matrice B de f dans cette base et exprimer A en fonction de B .
 iii. Calculer B^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

FIN DE L'ÉPREUVE