

Epreuve de Mathématiques
Durée : 3h
Lundi 17 juillet 2006

Instructions générales :

1. Cet énoncé comporte 4 pages de texte.
2. Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
3. Les parties Algèbre et Analyse doivent être rédigées sur deux feuilles séparées.
4. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
5. Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

1 Algèbre

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme sur E , $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite des sous espaces vectoriels $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} = [\ker [(\varphi - \lambda I_E)^p]]_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.
3. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit alors le nombre $v(\lambda)$ qui est le plus petit entier à partir duquel la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est constante. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\varphi - \lambda I_E)$ pour que $v(\lambda) = 0$.
4. On suppose que $v(\lambda) \neq 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in A_{v(\lambda)}$ tel que la famille $\{(\varphi - \lambda I_E)^0(x), (\varphi - \lambda I_E)(x), \dots, (\varphi - \lambda I_E)^{v(\lambda)-1}(x)\}$ soit libre.
5. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C} \dim \ker [(\varphi - \lambda I_E)^{v(\lambda)}] \geq v(\lambda)$.

On rappelle que I_E est l'identité de E .

Exercice 2. Une matrice carrée A de $M_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que si A est nilpotente alors A est non inversible.
2. Montrer que $(I - A)$ est inversible et calculer $(I - A)^{-1}$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, B une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui commute avec A .
4. Supposons que B est inversible, montrer que la matrice $C = B^{-1}A$ est nilpotente. En déduire que $A + B$ est inversible.
5. Réciproquement, supposons que la matrice $D = A + B$ est inversible. Montrer qu'il existe une matrice E telle que $D^p = EB$ (p étant l'entier tel que $A^p = 0$). En déduire que B est inversible.

On rappelle que I désigne la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.

2 Analyse

Les parties A et B sont indépendantes, mais sont utilisées par la partie C.

Partie A

Pour tout réel a positif ou nul, on note g_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_a(t) = t^a$.

A.1. Montrer que la fonction g_a est prolongeable par continuité en 0 (on notera toujours g_a la fonction ainsi prolongée, qui est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$). Préciser la valeur de $g_a(0)$. Montrer que la fonction g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $a \geq 1$.

Soient a et b deux réels positifs ou nuls. On pose

$$I(a, b) = \int_0^1 g_a(t)g_b(1-t) dt.$$

A.2. Justifier l'existence de l'intégrale $I(a, b)$. Comparer $I(a, b)$ et $I(b, a)$.

A.3. Soient a et b deux réels positifs ou nuls. Trouver une relation entre $I(a+1, b)$ et $I(a, b+1)$.

A.4. Calculer $I(a, 0)$. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a

$$I(a, n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+1)}.$$

A.5. Soient p et q deux entiers naturels. Exprimer $I(p, q)$ à l'aide de factorielles.

A.6. En déduire la valeur de l'intégrale

$$J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p+1}(\cos\theta)^{2q+1} d\theta,$$

où p et q sont deux entiers naturels.

Partie B

Pour tout réel a strictement positif, on note f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = x \ln \left(1 - \frac{a}{x}\right).$$

B.1. Préciser l'ensemble de définition de f_a .

On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentant la restriction de la fonction f_a à l'intervalle $]a, +\infty[$.

B.2. Si a et x sont deux réels tels que $0 < a < x$, démontrer l'encadrement

$$\frac{a}{x} \leq \ln x - \ln(x-a) \leq \frac{a}{x-a}.$$

B.3. En déduire les variations de la fonction f_a sur l'intervalle $]a, +\infty[$ (on dressera un tableau de variations). Préciser la nature des branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_a$.

B.4. Donner l'allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sur un même schéma.

B.5. On fixe $a > 0$ et on considère la suite $y = (y_n)$ définie, pour tout entier naturel n tel que $n > a$, par $y_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$.
Etudier le comportement (sens de variation, limite) de la suite (y_n) .

Partie C

Pour tout réel positif ou nul x et tout entier naturel non nul n , on pose

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x \, du.$$

C.1. Montrer que $F_n(x) = n^{x+1} I(x, n)$.

C.2. En utilisant les résultats de la partie **B**, montrer que, pour tout x fixé, la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

C.3. On fixe $x \geq 0$.

a. Montrer l'existence d'un réel strictement positif U tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad u \geq U \implies e^{-u} \leq \frac{1}{u^{x+2}}.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a

$$F_n(x) \leq \int_0^U e^{-u} u^x \, du + \frac{1}{U}.$$

c. Montrer que la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout réel positif ou nul x , on pose $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$.

C.4. Démontrer la relation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x+1) = (x+1)F(x).$$

En déduire la valeur de $F(k)$ pour k entier naturel.