

UNIVERSITÉ CADI AYYAD
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
Marrakech

Année : 2008/2009
Session du : 24 Juillet 2009
Responsable : I. OUASSOU

Concours d'entrée en 1^{ère} année du cycle préparatoire

Epreuve de mathématiques (durée 1h30min)

Remarques importantes

- 1) Les documentations, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
- 2) Parmi les réponses proposées elle n'y a qu'une qui est juste.
- 3) Cocher la case qui correspond à la réponse correcte sur la fiche de réponses.
- 4) **Règles de notation :**
Réponse juste = **1 point** ; Réponse fausse = **-1 point** ; Sans réponse = **0 point**.

Noter Bien Plus qu'une case cochée = **-1 point**.

Exercice 1 A) $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 22.

B) $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)$ n'est pas divisible par 48.

C) $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

D) $\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ n'est pas divisible par 120.

Exercice 2 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

A) h est solution de l'équation différentielle $E : y' - y = \frac{1}{1 + e^x}$.

B) Si $f - h$ est solution de E alors f est solution de E .

C) La solution générale de $y' + y = 0$ est $y = ke^x$, $k \in \mathbb{R}$.

D) La fonction f définie par $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x) + 2e^{-x}$ est solution de E .

Exercice 3 Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

A) 0,043 B) 0,275 C) 0,217 D) 0,033

(Les résultats proposés ont été arrondis à 10^{-3} près).

Exercice 4 Soit le complexe $w = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

- A) w est racine carrée de $\frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)$.
- B) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
- C) w^2 est solution de l'équation $Z^2 - \sqrt{2}Z + 1 = 0$.
- D) $w^4 = i$.

Exercice 5 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$, $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$, $z_D = 1 - 2i$.

- A) $AB \neq DC$.
- B) Le triangle ABD est rectangle.
- C) Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
- D) Les points A, B, C, D ne sont pas sur un même cercle.

Exercice 6 La limite de la fonction

$$g(x) = \frac{\sin^9 x + \cos^6 x + 1}{e^{-x} + 1}$$

quand x tend vers $+\infty$ vaut :

- A) 0 B) $+\infty$ C) n'existe pas D) 1

Exercice 7 Soit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$.

- A) La fonction f n'est pas périodique.
- B) On a $f'(x) = (\cos^2(x) + \sin(x))e^{\sin(x)}$.
- C) Une primitive de f est $F(x) = \sin(x)e^{\sin(x)} - 1$.
- D) L'aire du domaine plan délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ est différent de $e + 1$ unité d'aire.

Exercice 8 Indiquer la phrase qui vous semblent correcte parmi les phrases suivantes :

- A) Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
- B) La somme de deux nombres irrationnels est irrationnelle.
- C) Le produit de deux nombres irrationnels est irrationnel.
- D) La somme d'un nombre rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle.

Exercice 9 L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

$$A(2; 1; -1), B(-1; 2; 4), C(0; -2; 3), D(1; 1; -2)$$

et le plan P d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

- A) Les points A, B et C définissent un plan.
- B) La droite (AC) est incluse dans le plan P .
- C) Une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y + z - 11 = 0$.
- D) Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Exercice 10 L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

$$A(2; 1; -1), B(-1; 2; 4), C(0; -2; 3), D(1; 1; -2)$$

et le plan P d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

- A) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
- B) La distance du point C au plan P est égale à $4\sqrt{6}$.
- C) La sphère de centre D et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$ n'est pas tangente au plan P .
- D) Le point $E\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan P .

Exercice 11 On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos(t) dt \text{ et } y_n = \int_0^1 t^n \sin(t) dt.$$

- A) La suite (x_n) convergence vers $l > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.

- B) Pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = (n+1)y_n + \sin(1)$.
- C) Si on admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$. alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \cos(1)$.
- D) Si on admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$. alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n = \cos(1)$.

Exercice 12 Soient les deux intégrales définies par :

$$I = \int_0^\pi e^x \sin(x) dx \text{ et } J = \int_0^\pi e^x \cos(x) dx.$$

- A) On a $I = -2J$.
- B) On a $I = J + e^\pi + 1$.
- C) On a $I = -\frac{1}{2}(1 + e^\pi)$.
- D) On a $J = 1 + e^\pi$.

Exercice 13

- A) Si $x = \left[\ln(e^{\sqrt{2}}) \right]^2 e^{-\ln(\frac{1}{2})}$ alors $x = 4$.
- B) Si $x = \ln\left(\frac{3^2}{2^3}\right) - 4 \ln(\sqrt{3})$ alors $x = \ln 8$.
- C) Si $x = \frac{(\sqrt[4]{4})^2}{(\sqrt[4]{3\sqrt{3}})^2 \sqrt{\sqrt{3}}}$ alors $x = \frac{2}{5}$.
- D) Si $\ln(2x - 1) = \ln(x - 1)$ alors $x = 0$.

Exercice 14 Soit f la fonction définie sur $[0, 3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

- A) $\int_0^3 f(t) dt = 4$.
- B) $F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3 - 2x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 9 + 4x & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$
- C) F est continue sur $[0, 3]$.
- D) F est dérivable sur $[0, 3]$.

Exercice 15 Soient les suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \text{ et } v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}.$$

- A) La suite (u_n) n'est pas bornée.
- B) La suite (v_n) est décroissante.
- C) Pour tout entier $n > 0$, $u_n = \frac{3-3^n}{1-3^n}$.
- D) La suite (u_n) est convergente.

Exercice 16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x \sin\left(\frac{2}{x}\right).$$

- A) On a $f(x) = 0$ si et seulement si il existe un entier relatif non nul k tel que $x = \frac{1}{k\pi}$.
- B) On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- C) On a $f\left(\frac{4}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}$.
- D) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.