

Concours d'entrée en 1^{ère} année de l'ENSA de Marrakech
Epreuve de mathématiques (durée 1h30mn)

Attention !!!!!

Les calculatrices sont interdites.

Réponse juste = 1 pt Réponse fausse = -1 pt pas de réponse = 0 pt.

Exercice 1.

Soient u, v et w dans $\mathbb{N}$.

- a) $\forall n \in \mathbb{Z} \quad u \wedge v = u \wedge (v + nu)$
- b) si $u \wedge v = 1$ et w divise u alors $w \wedge v = 1$
- c) si $w \wedge u = 1$ alors $u \wedge v = u \wedge (v, w)$
- d) si p est premier et ne divise pas u alors p et u sont premiers entre eux.

Exercice 2.

Soient Z et Z' deux nombres complexes non nuls.

a)

$$\frac{1}{Z} = \frac{\overline{Z}}{|Z|^2}$$

b)

$$|\operatorname{Re}(Z)| \leq |Z|$$

c)

$$||Z| - |Z'|| \leq |Z + Z'|$$

d)

$$\operatorname{Re}(Z\overline{Z'}) = |Z| |Z'|.$$

Exercice 3.

Soient Z et Z' deux nombres complexes.

- a) $\operatorname{Arg}(ZZ') = \operatorname{Arg}(Z) + \operatorname{Arg}(Z')$

- b) $\text{Arg}(Z) = -\text{Arg}(\overline{Z}) = \text{Arg}(\frac{1}{Z})$
- c) $\text{Arg}(Z+Z') = \text{Arg}(Z) + \text{Arg}(Z')$
- d) $\text{Arg}(\frac{Z}{Z'}) = \text{Arg}(Z) - \text{Arg}(Z')$.

Exercice 4.

Soit la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

- a) la suite u_n est croissante
- b) la suite u_n est convergente
- c) la suite u_n est majorée
- d) la suite u_n est positive.

Exercice 5.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

a)
$$(\sqrt[n]{x})^n = x$$

b)
$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

c)
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m+n]{x}$$

d)
$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} = \sqrt[mn]{x^{m+n}}.$$

Exercice 6.

Soient E et F deux ensembles finis avec $\text{Card}(E) = m$ et $\text{Card}(F) = n$.

- a) $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$
- b) $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \cdot \text{Card}(F)$
- c) $\text{Card}(E \cap F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cup F)$
- d) $\text{Card}(P(E)) = 2^m$, avec $P(E)$ est l'ensemble des parties de E.

Exercice 7.

Soient A et B deux parties d'un ensemble X. On note par $P(A)$ la probabilité d'un événement A avec $P(A) \neq 0$.

- a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 - c) $P(A/B)P(A) = P(A \cap B).P(B)$
 - d) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
-

Exercice 8.

Soit pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ la fonction

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

- a) La limite en 0 est 0
 - b) La limite en 0 est 1
 - c) La limite en 0 n'existe pas
 - d) La fonction $f(x)$ est dérivable en 0.
-

Exercice 9.

Soit la fonction définie sur $D =]0, +\infty[$, par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- b) $y = x + 1$ est une asymptote oblique
- c) la fonction $F(x)$ définie sur D par

$$F(x) = \frac{x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3}$$

est une primitive de f sur D

- d) f est décroissante pour $x \geq 1$.
-

Exercice 10.

Soient deux fonctions

$$C(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{et} \quad S(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

- a) $C^2(x) - S^2(x) = 1$
- b) les deux fonctions sont positives
- d) $C' = S$ et $S' = C$
- d) les deux fonctions sont décroissantes.

Exercice 11.

Soit la fonction f définie sur D_f par

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 4}$$

- a) $D_f =]-\infty, -2] \cup]2, +\infty[$
 - b) f est dérivable sur $]-\infty, -2] \cup]2, +\infty[$
 - c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$
 - d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
-

Exercice 12.

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{\pi} x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{|x|}\right) - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et on note par D_f le domaine de définition de f .

- a) $D_f = [0, 1]$
 - b) f est continue en 0
 - c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 - d) $y = -2x + \frac{2}{\pi}$ est l'asymptote au graphe de f quand x se rapproche de $+\infty$.
-

Exercice 13.

a)

$$\int_0^1 \frac{2x + 2}{(x + 1)^2} dx = 3 \ln 2$$

b)

$$\int_1^{-1} e^{-x} dx = e^1 - e^{-1}$$

c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}$$

d)

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \ln\left(\frac{1 + e}{3}\right).$$

Exercice 14.

Dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les plans (P) et (Q) d'équations

:

$$(P) : 2x + y - 13 = 0$$

$$(Q) : x - 7y + 16 = 0$$

et la droite (D) d'équation paramétrique (D) :
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

et la sphère (S) d'équation (S) : $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 25$.

a) l'intersection de (P) et (Q) est la droite (D)

b) l'intersection de (P) et (S) est un cercle

c) la droite (D) est tangente à (S)

d) la droite (D) n'est pas tangente à (S).

Exercice 15.

Dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère la sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 + x - \frac{1}{4} = 0$$

et le plan (P) d'équation $y + z - 1 = 0$.

a) le centre de la sphère est $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$

b) le rayon de la sphère est $R = \frac{1}{2}$

c) le plan (P) est tangente à la sphère (S)

d) l'intersection de (P) et (S) est un cercle.
