

INSTITUT NATIONAL DES  
POSTES ET TELECOMMUNICATIONS

CONCOURS D'ACCES EN DEUXIEME ANNEE  
DU CYCLE INE DE L'INPT

**EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

(Aucun document n'est autorisé)

Durée 1H30

JEUDI 14 JUILLET 2005

N. B. :

- Les problèmes de cette épreuve sont indépendants.
- Les notations de l'énoncé seront respectées.
- La plus grande importance sera attachée à :
  - la rigueur des raisonnements
  - la présentation des copies qui doivent être propres et lisibles. (les résultats des questions seront bien mis en évidence)

### Problème I :

Soit une fonction périodique  $f(t)$  définie sur l'intervalle période  $[0, T]$  par :

$$f(t) = 1 \text{ si } 0 < t < T/2 \quad f(t) = 0 \text{ si } T/2 < t < T$$

On rappelle que le développement en série de Fourier d'une fonction périodique  $x(t)$  de période  $T$  est défini par :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n e^{2j\pi \frac{n}{T} t} \quad (1)$$

où  $C_n$  est le coefficient de la série de Fourier défini par  $C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2j\pi \frac{n}{T} t} dt$

- 1) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f(t)$ . On distinguera deux cas pour  $n$  pair et impair.
- 2) En utilisant la relation (1), montrer que :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |C_n|^2 \quad (2)$$

- 3) En déduire de la relation (2) la somme :  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

### Problème II :

On définit le produit de convolution de deux fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  par :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

Soit la fonction  $f_\alpha(t) = e^{-\alpha|t|}$  ( $\alpha > 0$ )

- 1) Tracer la fonction  $f_\alpha(t)$  en fonction de  $t$ .
- 2) Calculer le produit de convolution  $f_\alpha(t) * f_\alpha(t)$  en fonction de  $\alpha$  et  $t$ .

### Problème III :

Soit  $x(t)$  une fonction aléatoire définie par  $x(t) = A \cos(2\pi f_o t + \varphi)$  où  $A$  est une variable aléatoire réelle de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ , et  $\varphi$  est une variable aléatoire uniforme dans  $[0, 2\pi]$  et indépendante de  $A$ .  $f_o$  est une constante non nulle.

- 1) Calculer la moyenne statistique (espérance mathématique) de  $x(t)$ .
- 2) Calculer la covariance de  $x(t)$ .
- 3) Montrer que les fonctions aléatoires  $A \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$  et  $A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$  ont même moyennes statistiques et même covariances.

On suppose maintenant plus généralement le processus aléatoire complexe défini par :

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{2j\pi f_k t} e^{j\varphi_k}$$

où  $\{A_k\}$  désigne une suite de  $N$  variables aléatoires réelles, *non corrélées entre elles*, de moyenne  $\{m_k\}$  et de variance  $\{\sigma_k^2\}$ .

$\{f_k\}$  une suite de  $N$  valeurs non nulles et  $\{\varphi_k\}$  est une suite de  $N$  variables aléatoires réelles, *non corrélées entre elles*, de loi uniforme sur  $[0, 2\pi]$  et *indépendantes* des variables aléatoires  $\{A_k\}$ .

- 4) Calculer la moyenne statistique de  $x(t)$ .
- 5) Calculer la covariance de  $x(t)$  en fonction de  $\tau$  et des suites  $\{m_k\}$ ,  $\{\sigma_k^2\}$  et  $\{f_k\}$ .
- 6) En développant la covariance de  $x(t)$  en partie réelle et en partie imaginaire et en utilisant le résultat de la question 3, montrer que la covariance de la fonction aléatoire réelle  $y(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$  est :

$$C_y(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\sigma_k^2 + m_k^2) \cos(2\pi f_k \tau)$$

- 7) Calculer la densité spectrale de puissance de  $y(t)$

#### **N.B :**

- La covariance d'une fonction aléatoire complexe est définie par :

$$C_x(t, \tau) = E[x^*(t) x(t + \tau)]$$

$x^*(t)$  est le conjugué de  $x(t)$

- La densité spectrale de puissance d'une fonction aléatoire stationnaire au second ordre ( $C_x(t, \tau)$  ne dépend que  $\tau$ ) est donnée par la transformée de Fourier de sa covariance

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} C_y(\tau) e^{-2j\pi f \tau} d\tau \right)$$