

**CONCOURS D'ACCES EN PREMIERE ANNEE
DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT
19-07-2005**

**Epreuve de MATHEMATIQUES
(Durée : 2 heures 15 minutes)**

Avertissement :

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On pourra admettre les résultats d'une question pour traiter les suivantes.

Exercice 1

I) Soit f et g deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \int_0^1 g(t)f(xt)dt.$$

I. 1. a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|h| < \alpha \implies \forall t \in [0, 1], \quad |f(x_0t + ht) - f(x_0t)| < \varepsilon.$$

(On pourra utiliser la continuité uniforme de f sur tout intervalle compact).

I. 1. b) Montrer que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$.

I. 2. a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|h| < \alpha \implies \forall t \in [0, 1], \quad |f(x_0t + ht) - f(x_0t) - hf'(x_0t)| < \varepsilon|h|.$$

I. 2. b) Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \int_0^1 tg(t)f'(xt)dt.$$

I. 2. c) Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

II) Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et F l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie par

$$\forall \psi \in \mathcal{E}, \quad F(\psi) = x\psi,$$

où $x\psi$ désigne la fonction $x \mapsto x\psi(x)$.

II. 1) Montrer que F est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, injectif et non surjectif.

II. 2) Soit $\psi \in \mathcal{E}$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \psi(0) + x \int_0^1 \psi'(tx)dt.$$

II. 3) On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions $\psi \in \mathcal{E}$ telles que $\psi(0) = 0$. Montrer que $\mathcal{H}$ est l'image de $\mathcal{E}$ par F .

II. 4) Soit f un élément de $\mathcal{E}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{H}$. On désigne par $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par f . Montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{F}$.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien de dimension finie n ($n \geq 1$). Pour tout x, y de E , le produit scalaire de x et y sera noté $(x|y)$ et la norme sera notée $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$. Soit u un endomorphisme symétrique de E , non nul, de valeurs propres (distinctes ou non, mais nécessairement réelles) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$). Soit enfin $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

1) a) Montrer que pour tout vecteur x de E , on a : $\lambda_1\|x\|^2 \leq (u(x)|x) \leq \lambda_n\|x\|^2$.

1) b) Pour quels vecteurs x l'une des deux inégalités ci-dessus est-elle une égalité ?

2) On suppose ici que la matrice $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ de u pour la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ vérifie :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad m_{ij} \geq 0.$$

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur propre unitaire associé à la plus grande valeur propre λ_n . On lui associe $x^* = \sum_{i=1}^n |x_i| e_i$.

Montrer que $u(x^*) = \lambda_n x^*$ et que $\lambda_n > 0$.

3) Soit A une matrice quelconque à n lignes et n colonnes, à coefficients réels. On pose $S = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ (${}^tA$ dénote la transposée de A). On note α_1 (resp. α_n) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de S . Montrer que si A admet des valeurs propres réelles, elles appartiennent nécessairement à l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_n]$. Qu'en déduit-on lorsque A est antisymétrique ?

Exercice 3

1) Soit $a_0 = 1$ et pour n entier strictement positif,

$$a_n = \frac{2.4.6 \dots 2n}{1.3.5 \dots (2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

A l'aide de la formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi},$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sqrt{n}$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n (2n+1)^2}$.

2) Déterminer, I , l'ensemble des points réels x tels que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ converge.

Montrer que cette série converge normalement sur I et que sa somme $F(x)$ est une fonction continue sur I .

3) a) Montrer que pour tout $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a :

$$\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \frac{(\sin \theta)^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

3) b) En admettant la formule de Wallis $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n+1} d\theta$, calculer

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

4) Soit $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Montrer que $B - A = \frac{B}{4}$ et trouver B .

5) On définit, pour tout n entier strictement positif, la fonction u_n sur $[0, 1]$ par $u_n(0) = 0$ et pour $t \in]0, 1]$, $u_n(t) = -\frac{1}{n} t^n \ln t$.

Pour quelle valeur de $t \in [0, 1]$ la fonction u_n atteint-elle son maximum ? Quel est ce maximum ?

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ et calculer sa somme.

6) En déduire que

$$\int_0^1 \ln t \ln(1-t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

7) En utilisant ce qui précède calculer $\int_0^1 \ln t \ln(1-t) dt$.