

تحت إشراف
مجلس
التعليم

CONCOURS D'ACCES EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT 29-06-2004

Epreuve de MATHEMATIQUES (Durée : 3Heures)

Avertissement :

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la concision et de la précision de la rédaction. On pourra admettre les résultats d'une question pour traiter les suivantes.

Exercice 1

- I) 1) Montrer que l'intégrale $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.
- 2) Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on considère pour tout $r \geq 0$ les domaines
- $\Omega_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq r\}$, $\Delta_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq r^2\}$
- et les intégrales doubles de la fonction $(x, y) \mapsto e^{-x^2+y^2}$ sur ces domaines

$$A(r) = \int \int_{\Omega_r} e^{-x^2+y^2} dx dy, \quad B(r) = \int \int_{\Delta_r} e^{-x^2+y^2} dx dy.$$

Etablir les inégalités

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \leq B(r) \leq A(r).$$

En déduire que, quand $r \rightarrow +\infty$, $A(r)$ et $B(r)$ ont une limite commune que l'on calculera en fonction de G .

- 3) Calculer $B(r)$ en utilisant les coordonnées polaires et en déduire la valeur de G .
- II) 1) Déterminer pour quelles valeurs de la variable réelle x l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente. Etablir, pour ces valeurs de x , l'égalité : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)$ et $\Gamma(n + \frac{1}{2})$.
- 2) Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive, de classe C^2 , ayant un maximum global strict en 0 et telle que $f''(0) < 0$.
- a) Montrer que : $\exists a > 0; \forall t \in [-1, 1] \quad f(t) \leq f(0)e^{-at^2}$.
- b) En admettant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(f(0))^n} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^n dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{f''(0)}{2f(0)}t^2} dt,$$

Montrer que :

$$\int_{-1}^1 (f(t))^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{(f(0))^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{|f''(0)|}}.$$

- 3) a) En utilisant un changement de variable convenable, écrire pour tout entier $n \geq 1$, $\Gamma(n+1)$ sous la forme $n^{n+1}e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} (g(t))^n dt$, où g est une fonction que l'on explicitera.
- b) Montrer que, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\int_{-1}^{+\infty} (g(t))^n dt$ est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
- c) En déduire un équivalent de $\Gamma(n+1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- III) 1) On suppose que pour toute fonction continue $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} e^{-t}|h(t)|dt < +\infty$, on a : $\int_0^{+\infty} e^{-t}h(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n h(t)dt$.
- a) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

b) Montrer que $\int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt = \gamma$.

- 2) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$.
- a) Justifier l'existence de cette intégrale et calculer $B(x, n)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
- b) En déduire que, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, $B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$.

c) Montrer que, pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

3) a) Démontrer la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right).$$

4) Soit $\xi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction logarithmiquement convexe (c'est-à-dire la fonction $x \mapsto \ln \xi(x)$ est convexe), vérifiant $\xi(1) = 1$ et la relation fonctionnelle $\xi(x+1) = x\xi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \in [0, 1]$ et posons $t = \lambda x + (1-\lambda)y$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité

$$t(t+1) \dots (t+n)\xi(t) \leq (x(x+1) \dots (x+n)\xi(x))^\lambda (y(y+1) \dots (y+n)\xi(y))^{1-\lambda}$$

b) En déduire que :

$$\frac{\xi(t)}{\Gamma(t)} \leq \left(\frac{\xi(x)}{\Gamma(x)} \right)^\lambda \left(\frac{\xi(y)}{\Gamma(y)} \right)^{1-\lambda}.$$

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\xi(x) = \Gamma(x)$.

IV) On note Ψ la dérivée logarithmique de la fonction $\Gamma : \Psi = (\ln \Gamma)' = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\Psi^{(p)}$, la dérivée p -ième de la fonction Ψ , comme la somme d'une série de fonctions.

b) Exprimer, en fonction de la constante d'Euler γ , les nombres $\Gamma'(1)$ et $\Gamma''(1)$.

2) a) Montrer la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \Psi(n+1) + \gamma.$$

b) Démontrer, pour tout entier $p \geq 2$, la relation :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \Psi^{(p-1)}(n+1) + \zeta(p),$$

où $\zeta(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$.

Exercice 2

Soient α et β deux paramètres réels et soit la matrice :

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ -3-\beta & -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

1) a) Pour quelles valeurs de α et β la matrice M_α est-elle non inversible ?

b) Déterminer le polynôme caractéristique de M_α .

c) Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de M_α .

d) Soient les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 - \beta \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - \beta \\ -2 \end{bmatrix}$.

Montrer qu'ils sont linéairement indépendants et que $\{V_1, V_2\}$ est une base du sous-espace $\text{Ker}[(M_\alpha - (\alpha - 1)Id)^2]$, où Id est la matrice identité.

2) On pose par convention $M_\alpha^0 = Id$.

a) Calculer M_1^n , pour tout entier n .

b) A présent on suppose que $\alpha \neq 1$. En utilisant le 2) a) montrer que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad M_\alpha^n = \varphi_\alpha(n)M_1^2 + n(\alpha - 1)^{n-1}M_1 + (\alpha - 1)^n Id,$$

où φ_α est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \varphi_\alpha(0) = 0 \\ \varphi_\alpha(n+1) = (\alpha + 2)\varphi_\alpha(n) + n(\alpha - 1)^{n-1} \end{cases} \quad (1)$$

c) Montrer que la solution de (1) est

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi_\alpha(n) = (\lambda n + \mu)(\alpha - 1)^{n-1} + \nu(\alpha + 2)^n,$$

où λ , μ et ν sont des réels que l'on déterminera.