



المعهد الوطني للبريد و المواصلات
INSTITUT NATIONAL DES POSTES ET TELECOMMUNICATIONS

**CONCOURS D'ACCES EN PREMIERE ANNEE
DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT
28-06-2001**

**Epreuve de MATHEMATIQUES
(Durée :3Heures)**

Avertissement :

- L'appréciation des copies tient compte de la rigueur ,de la clarté des raisonnements et de la présentation.
- Encadrer vos résultats.



وكالة تنظيم وتقنين المواصلات
AGENCE NATIONALE DE RÉGLEMENTATION DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

PARTIE I

EXERCICE 1 :

Soient a, b et c trois réels fixés. On définit par récurrence la suite (v_n) de la manière suivante :

$$\begin{cases} v_0 = a, v_1 = b, v_2 = c \\ v_{n+3} = \frac{v_n + v_{n+1} + v_{n+2}}{3} \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose $V_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $V_{n+1} = AV_n$. En déduire l'expression de V_n en fonction de A, n et V_0 .
 b) Montrer que 1 est une valeur propre de A et trouver les autres valeurs propres de A (on les notera r et s).
 c) A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
- 2) a) Montrer que pour tout $n > 0$, les valeurs propres de A^n sont 1, r^n et s^n .
 b) Montrer l'existence (sans les calculer) de trois nombres complexes α, β et γ tels que,

$$\forall n > 0, v_n = \alpha + \beta r^n + \gamma s^n$$

- c) Montrer que $\forall x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n (v_n - \alpha) = 0$ et que la suite (v_n) converge vers α .
 d) En déduire que α est nombre réel.

- 3) Pour tout entier naturel n , on pose, $w_n = v_n + 2v_{n+1} + 3v_{n+2}$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = w_n$ et en déduire que $\alpha = \frac{a+2b+3c}{6}$.

EXERCICE 2 :

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie n . Pour tout x, y de E , le produit scalaire de x et y sera noté $(x|y)$ et la norme de x sera notée $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Pour tout endomorphisme f de E , on notera $f^2 = f \circ f$ et si $f \neq 0$, on pose

$$K(f) = \sup_{x \in \text{Ker}(f^2)} \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\| \|f^2(x)\|}$$

On rappelle que si h est un endomorphisme de E , $\text{Ker}(h)$ désigne le noyau de h et la norme de h est donnée par :

$$N(h) = \sup_{\|x\|=1} \|h(x)\|.$$

- 1) Calculer $K(f)$ dans les deux cas suivants :
 a) f est un endomorphisme de E vérifiant $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$
 b) f est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, représenté dans une base orthonormée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 2) Montrer que si f est un endomorphisme bijectif de E , alors $K(f) = K(f^{-1})$.
- 3) Montrer que si f est un endomorphisme autoadjoint de E , alors $Ker(f) = Ker(f^2)$.
Calculer $K(f)$ dans le cas où $f^2 \neq 0$.
- 4) Montrer que si f est un endomorphisme de E alors :

$$E = Ker(f) \oplus Im(f) \text{ Si et Seulement Si } Ker(f) = Ker(f^2).$$

On note g l'endomorphisme de $Im(f)$ induit par f et on suppose que $f^2 \neq 0$.

- i) Montrer que g est bijectif.
 - ii) Montrer que $K(f)$ est fini si et seulement si $Ker(f) = Ker(f^2)$ et que dans ce cas,
$$K(f) \leq N(f)N(g^{-1}).$$
 - iii) Montrer que $K(f) \geq 1$.
- 5) Soit f un endomorphisme de E et f^* son adjoint.
 - a) Montrer que $f^* \circ f$ est un endomorphisme autoadjoint de E positif.
 - b) Soit λ la plus grande valeur propre de $f^* \circ f$. Montrer que $N(f) = \sqrt{\lambda}$.

PARTIE II

EXERCICE 3 :

Dans cet exercice, on pourra utiliser la formule suivante, sans la justifier:

$$(*) \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} \text{ où } (a_{n,p})_{n,p} \text{ est une famille de nombres réels positifs.}$$

Pour tout réel t , on pose

$$f(t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - e^{-nt}).$$

- 1) Montrer que $\forall t \in]0, +\infty[$, $f(t)$ est bien définie.
- 2) Donner le développement en série entière de la fonction $x \rightarrow -\ln(1-x)$ et préciser le rayon de convergence.
- 3) Montrer que $\forall t \in]0, +\infty[$, $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(e^{nt} - 1)}$. (Indication : on utilisera 2) et la formule (*)).
- 4) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{n(e^{nt} - 1)}$ est normalement convergente sur $]0, +\infty[$.
- 5) Dédire, en utilisant 3) et 4), un équivalent simple de $f(t)$ quand t tend vers 0.

EXERCICE 4 :

Ω étant le disque ouvert de $\mathbb{R}^2$, de centre O et de rayon 1. u une application de Ω vers $\mathbb{R}$ de classe C^2 , vérifiant : $\forall (x, y) \in \Omega, \Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$.

On considère l'application F définie sur $]0, 1[\times \mathbb{R}$ par $F(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- 1) a) Vérifier que F est de classe C^2 sur $]0, 1[\times \mathbb{R}$ et calculer $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$ en fonction des dérivées partielles de u par rapport à x et y .

b) En déduire que $\forall (r, \theta) \in]0, 1[\times \mathbb{R}, r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = 0$.

- 2) Pour tout entier relatif n et tout réel r de $]0, 1[$, on pose :

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

- a) Vérifier que c_n est de classe C^2 et montrer que pour tout r de $]0, 1[$,

$$c'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad c''_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

- b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall r \in]0, 1[, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta = -n^2 c_n(r)$$

- 3) On considère l'équation différentielle $(E_n) : x^2 y'' + xy' - n^2 y = 0$.

On désigne par S_n l'ensemble des solutions de (E_n) et par T_n l'ensemble des solutions bornées de (E_n) .

- a) Montrer que c_n est dans T_n .

- b) Montrer que S_n est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

- c) Déterminer les solutions de (E_n) qui sont de la forme x^a où a est à déterminer.

- d) Déduire les solutions de (E_n) , puis donner c_n .

- 4) Donner l'expression de F pour $(r, \theta) \in]0, 1[\times \mathbb{R}$