



المعهد الوطني للبريد والمواصلات السلكية واللاسلكية
INSTITUT NATIONAL DES POSTES ET TELECOMMUNICATIONS

**CONCOURS D'ACCES EN PREMIERE ANNEE
DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT**

(29-06-2000)

Epreuve de Mathématiques

(Durée: 3H00)

Avertissement:

- L'appréciation des copies tient compte de la rigueur, de la clarté des raisonnements et de la présentation.
- L'utilisation de calculatrices est strictement interdite.



وكالة تنظيم الاتصالات
AGENCE NATIONALE DE RÉGLEMENTATION DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

EXERCICE 1 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ de $M_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que A est diagonalisable et déterminer une base $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ permettant la diagonalisation de A de sorte que les coordonnées des e_i soient parmi 0, 1 et -1.
- 2) a) A est-elle inversible ?
b) Calculer A^2 .
c) Étudier la diagonalisation de A^2 à partir de celle de A et retrouver le résultat précédent.
d) En déduire l'expression générale de A^n pour n entier.
- 3) a) On désigne par E_1, E_2 les sous-espaces propres de A.
Déterminer les matrices P_1 et P_2 des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ (respectivement) sur E_1 parallèlement à E_2 et sur E_2 parallèlement à E_1 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
b) Calculer, pour i, j dans $\{1, 2\}$, $P_i P_j$ et $\sum_{i=1}^2 P_i$.
c) Écrire les matrices de ces projecteurs dans la base B.
d) En déduire que $A = \sum_i \lambda_i P_i$ où λ_i est la valeur propre correspondant au sous-espace propre E_i .
e) Retrouver ainsi l'expression de A^n .

EXERCICE 2

L'espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3 est rapporté à une base orthonormée directe (i, j, k) . Un vecteur w de composantes (a, b, c) étant donné, on considère l'application qui, à tout vecteur v de E, associe le vecteur $T(v) = v \wedge w$.

- I) a) Montrer que T est un endomorphisme de E.
b) Écrire la matrice M de T par rapport à la base (i, j, k) .
c) Montrer que l'opérateur adjoint T^* de T vérifie $T^* = -T$.
d) Calculer T^2 et exprimer T^3 en fonction de T.
e) Déterminer le noyau de T et l'image de T.
- II) Application: on prend $a = \frac{-1}{3}, b = c = \frac{2}{3}$.
a) Montrer que les vecteurs $U = \frac{1}{3}(2i - j + 2k), V = \frac{1}{3}(2i + 2j - k)$ forment une base orthonormée de $\text{Im } T$.
b) Montrer que (U, V, w) est une base orthonormée directe de E.
c) Calculer la matrice de T par rapport à la base (U, V, w) .
d) Montrer que 0 est l'unique valeur propre réelle de T.
- III) Soit d un réel non nul
a) Montrer que $T + dI$ est inversible.
b) On considère l'endomorphisme R_d de E tel que $R_d = (T + dI)^{-1}(-T + dI)$ où I est l'endomorphisme unité de E.
Montrer que la matrice N_d de R_d par rapport à la base (i, j, k) est orthogonale.
c) Prouver que, pour w fixé, toutes les matrices N_d admettent un vecteur propre en commun.

EXERCICE 3

Soient f et g les fonctions d'une variable réelle x définies par

$$f(x) = \int_0^1 t^{-x} \sqrt{1+t} dt, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}} dt$$

- 1) a) Déterminer le domaine de définition D de la fonction f .
b) Donner le sens de variation de f .
c) Quelles sont les limites de f aux bornes de D ?
d) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1 dans D .
(On pourra introduire la différence $\sqrt{1+t}-1$).
e) On suppose $x < 0$. En utilisant une intégration par parties, établir une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
f) Calculer $f(0)$, $f(-1)$, $f(-1/2)$ et $f(1/2)$.
- 2) Déterminer le domaine de définition de la fonction g .
- 3) On fixe $x \in]-1, 1[$.
 - a) Soit n un entier naturel. On pose $I_n = \int_0^1 (-\ln t)^n dt$. Montrer que $I_n = n!$.
 - b) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que
$$\int_\alpha^1 \frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_\alpha^1 \frac{(-\ln t)^k t}{\sqrt{1+t}} dt \right) \frac{x^k}{k!}$$
(Justifier en particulier l'existence de cette somme).
 - c) On pose pour $\alpha \in]0, 1[$: $g_n(\alpha) = \left(\int_\alpha^1 \frac{(-\ln t)^n t}{\sqrt{1+t}} dt \right) \frac{x^n}{n!}$
Montrer que la série $\sum g_n$ converge uniformément sur $]0, 1[$.
 - d) En déduire une expression de $g(x)$ comme somme d'une série entière de la forme $\sum a_n x^n$.
- 4) a) Pour $x \in D$, exprimer $f(x)$ en fonction de $g(x)$.
b) Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
c) Montrer que f admet un développement en série entière dont on précisera le rayon de convergence.

EXERCICE 4

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle, de classe C^1 , et vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f'(x) = 0$$

- 1) Prouver que la fonction $f_0 : x \rightarrow e^{-x^2}$ vérifie les hypothèses ci-dessus.
- 2) On pose pour tout réel y : $\varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx$.
 - a) Donner le domaine de définition de φ (c'est à dire l'ensemble des valeurs de y pour lesquelles l'intégrale considérée converge).
 - b) Que peut-on dire de φ lorsque f est paire ? impaire ?
- 3) On pose $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(x - 2k\pi) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x + 2k\pi)$.
 - a) Montrer que g est 2π -périodique et de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$.
 - b) Exprimer à l'aide de φ les coefficients de Fourier de g .