

- On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
- Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.
- Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Les différentes parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mesures de grandeurs électriques et exemples de capteurs

Notre mode de vie actuel est fortement tributaire de l'utilisation du courant électrique. Pour subvenir à nos besoins, d'autres formes d'énergie (mécanique, chimique, nucléaire, etc.) sont converties en énergie électrique. L'électricité est présente dans tous les aspects de notre quotidien : appareils électroménagers, moyens de transports, moyens de communications, etc. La mesure et le traitement d'autres grandeurs physiques se base sur des capteurs, de ces grandeurs, qui les convertissent en signaux électriques : capteurs de température, de pression, d'éclairement, etc.

Données :

- Masse de l'électron $m = 9.10^{-31} \text{ kg}$.
- Charge de l'électron $q = -e = -1,6.10^{-19} \text{ C}$.
- Vitesse de la lumière : $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.
- Permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.
- A une grandeur sinusoïdale $f(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$, on associe le complexe souligné $\underline{f}(t) = F_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$, avec $j^2 = -1$ et tel que $f(t) = \text{Re}(\underline{f}(t))$; le conjugué de $\underline{f}$ sera noté $\underline{f}^*$.
- Pour un vecteur $\vec{V}$, $\text{div}(\text{rot } \vec{V}) = 0$.

I Questions de cours

Un générateur électrique crée un champ électrique $\vec{E}$, supposé uniforme, dans un conducteur métallique cylindrique (C) d'axe $X'X$ de longueur $AB = L$, de section S . Les porteurs de charges libres, de charge q , de densité volumique n , sont supposés avoir le même vecteur vitesse $\vec{v}$ par rapport au conducteur : le mouvement des charges est appelé courant électrique. Voir figure 1.

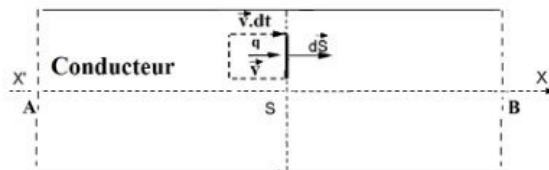


Figure 1 – Conducteur parcouru par un courant électrique

I.1. Généralités sur les courants électriques

I.1.1. Exprimer la densité volumique des charges mobiles $\rho(M)$ en un point M du conducteur.

I.1.2. Donner l'expression de la charge d^3Q contenue dans le volume élémentaire $dv = \vec{v} \cdot d\vec{S} \cdot dt$.

Le vecteur densité volumique de courant $\vec{J}(M)$ est défini par : $d^3Q = \vec{J}(M) \cdot d\vec{S} \cdot dt$

I.1.3. Donner l'expression de $\vec{J}(M)$

I.1.4. En déduire l'intensité I du courant dans le conducteur.

I.2. Bilan de la charge électrique en régime variable

On se propose d'établir le bilan local, unidirectionnel selon $X'X$, de la conservation de la charge.

On raisonne sur la tranche de conducteur, de section S , comprise entre x et $x+dx$.

I.2.1. Donner l'expression de la charge dQ_{surf} reçue grâce aux échanges surfaciques, en x et en $x+dx$, pendant une durée élémentaire dt .

I.2.2. Exprimer la variation de la charge au sein de la tranche en fonction de $\rho(x, t)$.

I.2.3. En déduire l'expression du bilan local de charge à une dimension, puis faire la généralisation à trois dimensions.

I.2.4. Retrouver ce bilan en partant de deux relations de Maxwell dans la matière.

I.3. Loi d'Ohm et effet Joule

On étudie le mouvement d'un électron de charge $q = -e$ au sein d'un métal sous l'action du champ électrique $\vec{E}$ du générateur et on modélise les frottements par une force $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau} \cdot \vec{v}$, où τ est une constante positive.

I.3.1. Appliquez le principe fondamental de la dynamique et déterminez l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$.

I.3.2. Donner, en régime permanent la vitesse limite, et le vecteur densité volumique $\vec{J}$.

I.3.3. En déduire la loi d'Ohm locale et donner l'expression de la conductivité électrique γ .

I.4. Résistances d'appareils de mesures

Un galvanomètre permet de mesurer des courants d'intensité faible $i_{G,max} = 100\mu A$. Il est formé d'une bobine carrée de $N = 500$ spires de côté $l = 2cm$, d'un fil de cuivre de diamètre $d = 0,1mm$. La résistivité du cuivre est $\rho = 1,6 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot m$

I.4.1. Déterminer l'expression, puis la valeur de la résistance interne du galvanomètre r_G

Pour construire un ampèremètre permettant de mesurer un courant d'intensité $I_{A,max}$ plus grande, on place en parallèle avec le galvanomètre, de résistance r_G , une résistance r_S plus faible appelée shunt. On introduit le facteur de multiplication $m = \frac{I_{A,max}}{i_{G,max}}$.

I.4.2. Déterminer l'expression de r_S en fonction de r_G et de m .

On donne $m = 1000$, calculer la résistance équivalente r_A de l'ampèremètre.

Un voltmètre est constitué d'une résistance additionnelle R_V placé en série avec le galvanomètre. La tension aux bornes de l'ensemble est $U = k \cdot i_G$.

I.4.3. Donner l'expression de la constante k et en déduire la valeur de R_V pour avoir un voltmètre de calibre $U_{max} = 10V$.

I.4.4. Montages volt-ampéremétrique pour mesurer une résistance R

Pour déterminer la valeur d'une résistance R , on utilise un voltmètre et un ampèremètre qui donnent respectivement la tension V et l'intensité i dans les deux cas de la figure 2 : a (montage amont) et b (montage aval); les valeurs de R ainsi déterminées sont notées respectivement $R = R_c$ et $R = R_l$.

I.4.4.1. Exprimer les erreurs relatives dans les deux cas : $\varepsilon_c = \left| \frac{R_c - R}{R} \right|$ et $\varepsilon_l = \left| \frac{R_l - R}{R} \right|$ en fonction des résistances r_A , R_V et R . Tracer les graphes $\varepsilon_c(R)$ et $\varepsilon_l(R)$; commenter.

I.4.4.2. Quels types d'erreurs sur la mesure des résistances sont introduites par ces deux montages : aléatoires ou systématiques? Préciser si c'est par défaut ou par excès.

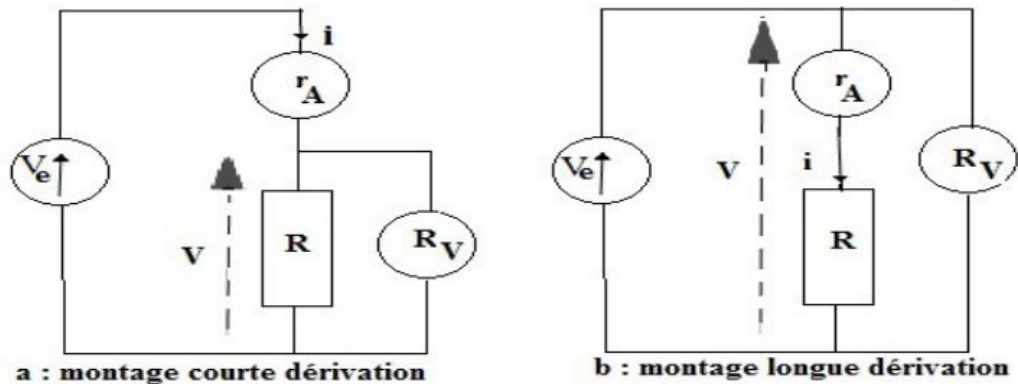


Figure 2 – Montages : courte dérivation (ou amont) et longue dérivation (ou aval)

II Mesures de l'intensité de courants

II.1. Principe d'un galvanomètre

Le galvanomètre permet de mesurer l'intensité d'un courant électrique. Il est formé d'une bobine comportant N_0 spires rectangulaires, suspendue par un fil dans l'entrefer d'un aimant; ce dernier crée un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}$ parallèle aux cotés MN et QP d'une spire de la bobine : voir figure 3. Une aiguille solidaire de la bobine permet de repérer le mouvement de rotation de l'ensemble autour d'un axe vertical OZ. Le moment d'inertie de l'ensemble est noté J.

Un générateur de force électromotrice E délivre un courant d'intensité i qui traverse le galvanomètre de résistance r_G en série avec une résistance R.

On note les dimensions de la bobine : $MN = 2a$ et $NP = h$ et on pose $\varphi = 2ah \cdot N_0 \cdot B_0$: voir figure 3.

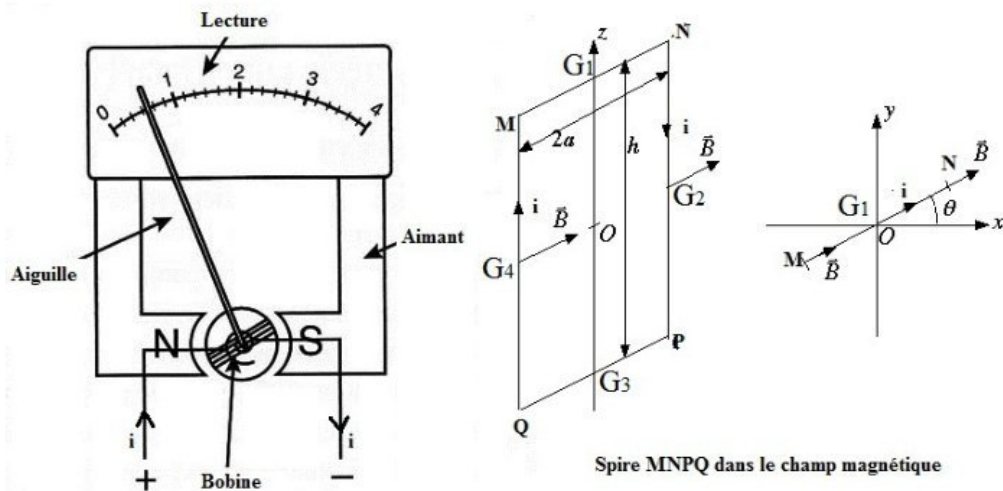


Figure 3 – Principe d'un galvanomètre

II.1.1. Déterminer, avec justification, la résultante de Laplace qui s'exerce sur la bobine.

II.1.2. Établir, avec justification, l'expression du moment des forces de Laplace $\vec{M}_L$ s'exerçant sur la bobine.

Lors de son mouvement, l'ensemble bobine-aiguille est rappelé par un couple de torsion dont le moment est $\vec{M}_r = -C \cdot \theta \cdot \vec{u}_z$, où $C > 0$ est la constante de torsion.

- II.1.3. Par application du théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ caractérisant le mouvement de rotation de la bobine.
- II.1.4. Lors de la rotation θ , déterminer la force électromotrice induite dans la bobine.
- II.1.5. Appliquer la loi des mailles au circuit fermé et déterminer l'expression de l'intensité i .
- II.1.6. Donner la forme générale de la solution $\theta(t)$. Discuter le mouvement de l'ensemble en fonction des données utiles.
- II.1.7. En déduire quel cas pratique faut-il choisir pour que le galvanomètre puisse mesurer l'intensité i ? Représenter, alors l'allure du graphe $\theta(t)$.

II.2. Pince ampèremétrique

Soit un tore de centre O, de rayon intérieur R_0 , de section carré de côté a et d'axe de révolution OZ. Sur ce tore on enroule, régulièrement et dans le même sens, N spires ; ce circuit est fermé par un ampèremètre de résistance négligeable et l'ensemble a pour résistance R. La perméabilité magnétique du tore est μ_0 supposée égale à celle du vide. Un fil infini confondu avec OZ est parcouru par un courant sinusoïdal : $I(t) = I_M \cos(\omega.t)$. Voir figure 4.

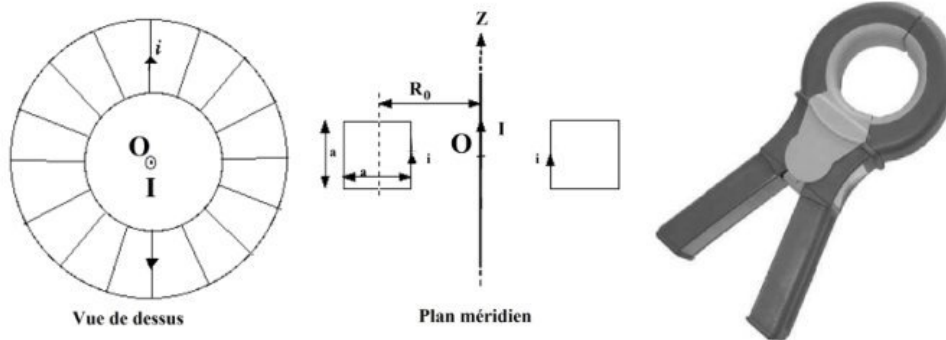


Figure 4 – Principe d'une pince ampèremétrique

- II.2.1. En utilisant les symétries et les invariances du problème, déterminer les caractéristiques du champ (d'induction) magnétique $\vec{B}(M)$ créée par le fil en un point M repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ et z .
- II.2.2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M.
- II.2.3. Calculer le flux magnétique Φ de ce champ à travers le tore et en déduire le coefficient d'inductance mutuelle M.
- II.2.4. Montrer que le fil engendre dans le tore un courant $i(t)$.
- II.2.5. Déterminer l'expression du flux magnétique propre Φ_p dans le tore.
- II.2.6. En déduire la relation entre les courants complexes $\underline{I}$ et $\underline{i}$.
- II.2.7. Le nombre de spires N est très grand, simplifier cette relation et montrer que ce dispositif permet de mesurer des courants intenses dans le fils. Quel est son principal avantage?

III Exemple d'un capteur de température : thermomètre électronique.

On utilise une résistance de platine R_p variable avec la température, celle-ci est engagée dans un montage dit "pont de Wheatstone" : voir figure 5. Le montage est alimenté par une source de courant $I_0 = 1,00mA$.

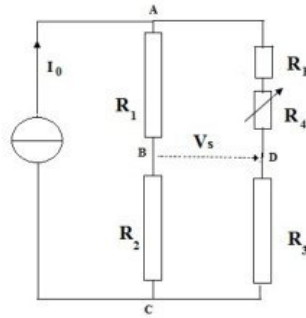


Figure 5 – Pont de Wheatstone avec thermistance

On donne $R_1 = R_2 = R_3 = 1,00k\Omega$, et R_4 : résistance variable ; ces résistances sont supposées indépendantes de la température. La résistance de platine varie avec la température t exprimée en $^{\circ}C$ selon la loi : $R_P = R_{P,0}(1 + \alpha.t)$, avec $R_{P,0} = 100\Omega$: valeur à $0^{\circ}C$ et $\alpha = 4,00.10^{-3}^{\circ}C^{-1}$. On posera $R'_4 = R_4 + R_P$.

III.1. Exprimer la tension $V_s = V_D - V_B$ en fonction de R_1, R_2, R_3, R_4, R_P et I_0 .

III.2. A $t = 0^{\circ}C$, on fait varier R_4 , et pour une valeur $R_{4,0}$ la tension V_s s'annule : le pont est dit équilibré, un galvanomètre placé entre B et D indique un courant nul.

Exprimer $R_{4,0}$ en fonction des autres résistances du montage.

Cette valeur sera maintenue dans la suite.

III.3. Lorsque la température t varie, déterminer l'expression de la tension $V_s(t)$.

III.4. Montrer qu'on pourra supposer la variation $V_s(t)$ comme linéaire pour $0^{\circ}C \leq t \leq 100^{\circ}C$. Donner, alors, l'expression de $V_s(t)$.

III.5. Le signal délivré étant faible, on se propose de l'amplifier avec un gain G .

Proposer un montage à résistances et amplificateur opérationnel permettant d'obtenir une tension amplifiée $V'_s = 10.V_s$?

III.6. La tension V'_s est appliquée à un convertisseur analogique-numérique (CAN) à 8 bits. On veut faire des mesures pour $0^{\circ}C \leq t \leq 100^{\circ}C$, déterminer la variation minimale de température Δt_{min} que l'on peut apprécier avec ce montage.

IV Étude d'un capteur de déplacement

IV.1. Expression de la capacité d'un condensateur plan

Ce condensateur est formé de deux armatures conductrices planes $(P_1)(z = 0)$ et $(P_2)(z = e)$ orthogonales à l'axe OZ. Les deux armatures carrées, chacune de surface $S = l^2$ sont séparées par une distance e occupée par un diélectrique de permittivité $\epsilon = \epsilon_0$.

Les deux armatures (P_1) et (P_2) portent les charges électriques respectives Q_1 et $Q_2 = -Q_1$.

Dans toute la suite, on néglige les effets de bord : $e \ll l$.

IV.1.1. Dédire des considérations d'invariance(s) et de symétrie(s) la forme du champ électrique en un point $M(x, y, z)$ entre les armatures : $\vec{E}(M)$

IV.1.2. Déterminer l'expression du vecteur champ électrique en fonction des données.

IV.1.3. En déduire l'expression de la différence de potentiel $V = V_{P_1} - V_{P_2}$.

IV.1.4. Déterminer l'expression de la capacité C de ce condensateur.

IV.2. Capteur de déplacements

On se propose d'enregistrer la déformation selon l'axe $X'X$ d'une structure (S) : voir figure 6(a). Pour cela, on réalise trois métallisations planes identiques P_1 , P_2 et P_3 qui constituent deux condensateurs plans de capacité : $C_{12}(P_1, P_2)$ et $C_{13}(P_1, P_3)$: voir figure 6(b). Ces capacités varient lors de la déformation de (S), car P_1 est solidaire de cette structure. L'aire des armatures est $S = l^2$ et l'épaisseur e est remplie d'air de permittivité diélectrique ϵ_0 . Les lignes de champ sont supposées orthogonales aux conducteurs.

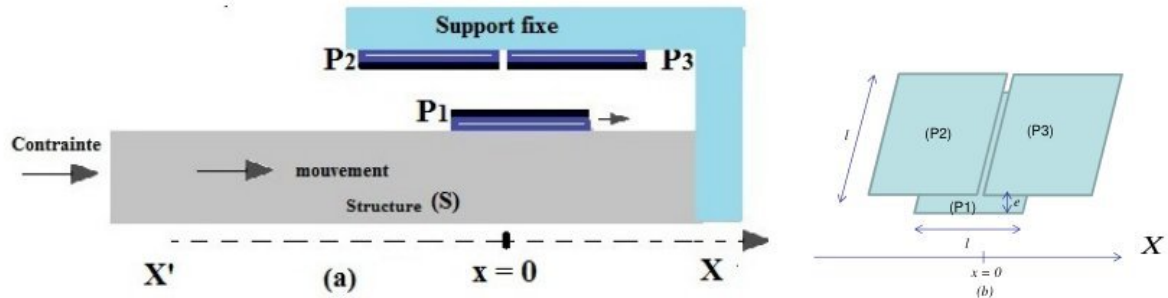


Figure 6 – Les deux condensateurs de capacités variables avec la déformation de la structure

- IV.2.1. Le centre de l'armature P_1 est repéré par son abscisse x ; initialement, il se trouve en $x = 0$. Déterminer alors les expressions des capacités : $C_{12,0}(x = 0)$ et $C_{13,0}(x = 0)$; on notera $C_0 = C_{13}(x = \frac{l}{2})$.
- IV.2.2. Lorsque P_1 est translatée de x de sa position d'origine, déterminer les expressions des nouvelles capacités $C_{12}(x)$ et $C_{13}(x)$, en fonction de l , C_0 et x .

Les deux condensateurs sont montés en pont de Wheatstone avec deux résistances fixes de valeur R : voir figure 7. L'ensemble est alimenté par un générateur d'impédance négligeable et délivrant une tension sinusoïdale $v_e(t) = V_m \cdot \cos(\omega_g \cdot t)$.

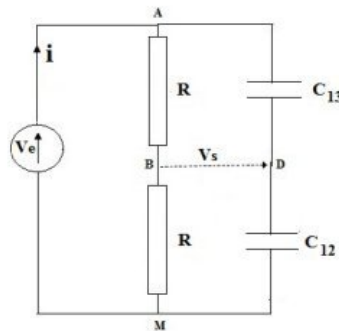


Figure 7 – Pont de Wheatstone en alternatif

- IV.2.3. Exprimer la tension $v_s(t) = v_D - v_B$ en fonction de $v_e(t)$, C_{12} et C_{13} , puis en fonction de $v_e(t)$, l et x .

On s'intéresse à une translation sinusoïdale de pulsation ω : $x(t) = X_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

- IV.2.4. Montrer que le spectre de Fourier de $v_s(t)$ comporte deux composantes sinusoïdales dont on donnera les pulsations.

Pour récupérer l'information pertinente, on réalise une mise en forme du signal. Le pont de Wheatstone est complété par les étages (a) et (b) de la figure 8. L'étage (b) réalise la détection synchrone ; celle-ci met en jeu un multiplieur et un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c \ll \omega_g$.

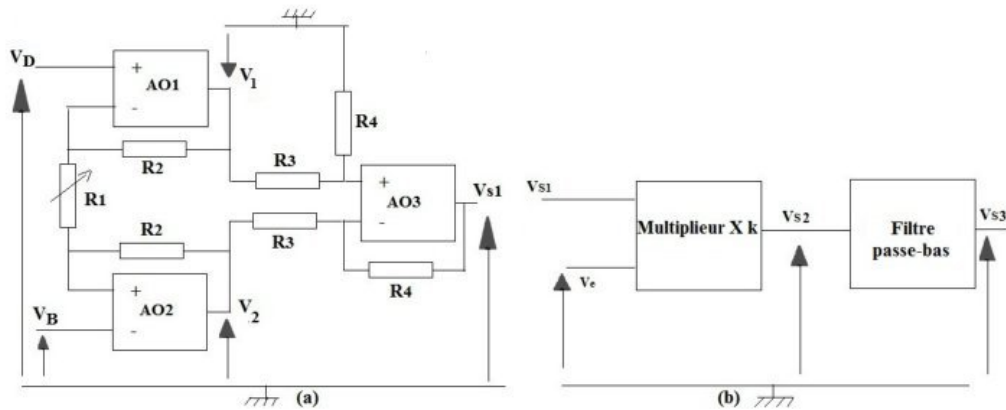


Figure 8 – Circuit de conditionnement du signal utile

- IV.2.5. Recopier le montage de la figure 8(a) et exprimer la tension $v_{s1}(t)$ en fonction de la tension $v_s(t)$. Quel est l'intérêt de ce montage ? On prendra $R_3 = R_4$.
- IV.2.6. Déterminer les tensions de sorties $v_{s2}(t)$, et $v_{s3}(t)$. Conclure sur la linéarité de la chaîne de mesure.
- IV.2.7. Proposez un montage simple de filtre passif passe bas, et donner l'expression de sa pulsation de coupure ω_c .