

Énoncé de Maths CNC .mp.2020

Exercice 1

Étude d'une fonction définie par une intégrale.(4pts)

1. Montrer que pour tout réel x , la fonction $t \rightarrow e^{tx-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Dans la suite de cet exercice , on note f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt.$$

2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p e^{tx-t^2} dt$$

3. Montrer que $f'(0) = 0$.
4. Montrer que pour tout réel x , $f(x) + xf'(x) = 2f''(x)$.
5. En déduire que, pour tout réel x , $xf(x) - 2f'(x) = 0$.
6. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2}$ Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = e^{\frac{x^2}{4}}$

Exercice 2

Etude d'une série de fonction et calcul de sa somme (4pts)

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, +\infty[, u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
Dans la suite ,on notera g sa somme : $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx} \quad x \geq 0$.
2. Justifier que g est continue sur $[0, +\infty[$
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et donner une expression simple de sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles.
4. En admettant que $g(0) = \ln(2)$ donner une expression simple de l'aide de fonctions usuelles.

Problème

Recherche d'hyperplans stable pas produit matriciel

Notation

Dans tout ce problème $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace des matrices à n lignes et p colonnes, et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, tA désigne la matrice transposée de A et $\text{rg}(A)$ son rang.

Si $p=n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes; $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on note $\text{Tr}(A)$ la trace de A et A^{-1} l'inverse de A si A est dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des nombres complexes on note $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pris dans cette ordre.

Dans ce problème $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^*$ désigne le dual de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On rappelle qu'il s'agit du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; il est de dimension finie et on a :

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2.$$

1

1^{ier} Partie

un isomorphisme canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans son dual.

Pour tout couple $(i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i -ième ligne et j -ième colonne valant 1; on rappelle que $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que :

$$\forall (i, j, k, l) \in \{1, 2, \dots, n\}^4 \quad E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

$\delta_{j,k}$ étant le symbole de Kroneker valant 1 si $j=k$ 0 si non.

1.1

vérifier que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'application $T_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, M \rightarrow \text{Tr}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1.2

On note $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^*$ l'application définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \phi(A) = T_A.$$

1.2.1

Vérifier que ϕ est une application linéaire.

1.2.2

Montrer que ϕ est injective. Montrer que pour toute forme linéaire ψ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\psi = T_A$.

1.3

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que : $\mathcal{H} = \text{Ker}(T_A)$.

1.4

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $A \neq O$. Montrer que si $\text{Ker}(T_A) \subset \text{Ker}(T_B)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $B = \lambda A$.

1.5

Montrer que si M et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$.

1.6

Soit M et N deux matrices semblables et soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$; on note $\mathcal{H}_A = \text{Ker} T_A$ et $\mathcal{H}_B = \text{Ker} T_B$.
Montrer que $\mathcal{H}_A = P\mathcal{H}_B P^{-1} = \{PMP^{-1}; M \in \mathcal{H}_B\}$.

2

2^{ier} Partie

Etude du noyau $\text{Ker}(T_A)$ pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle de trace nulle.

On considère une matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\text{Tr}(A) = 0$ et on pose $\mathcal{H}_A = \text{Ker} T_A$.

2.1

Justifier que $\mathcal{H}_A$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Quelle est sa dimension ?

2.2

On suppose que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et on note $R = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ des matrices telles que : $A = PRP^{-1}$.

2.2.1

Vérifier que $\mu = -\lambda \neq 0$

2.2.2

Montrer que $\mathcal{H}_{\mathcal{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.

2.2.3

Montrer que $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ n'est pas stable par le produit matriciel.

2.2.4

En déduire que $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ n'est pas stable par le produit matriciel.

2.3

On suppose ici que la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2.3.1

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $A = PRP^{-1}$ avec $R = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.3.2

Montrer que $\mathcal{H}_{\mathcal{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} ; (a, b, d) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.

2.3.3

Montrer que $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ sont stables par le produit matriciel.

3

3^{ier} Partie

Etude des hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par le produit matriciel.

Dans cette partie on suppose qu'il existe un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par le produit matriciel et on cherche à montrer que $n=2$ puis on détermine de tels hyperplans stables ; on note ψ une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathcal{H} = \text{Ker}\psi$

3.1

On cherche à montrer que $I_n \in \mathcal{H}$; raisonnons par l'absurde que $I_n \notin \mathcal{H}$.

3.1.1

Vérifier que $\psi(I_n) \neq 0$.

3.1.2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $M^2 \in \mathcal{H}$; on pose $\lambda = \frac{\psi(M)}{\psi(I_n)}$

- (i) Montrer que $(M - \lambda I_n)^2 \in \mathcal{H}$.
- (ii) En déduire que $((\lambda)^2 I_n - 2\lambda M) \in \mathcal{H}$
- (iii) Montrer que $\lambda = 0$ et conclure que $M \in \mathcal{H}$.

3.1.3

Montrer que pour tout couple (i,j) élément de $\{1,2,\dots,n\}^2$ avec $i \neq j$, $E_{i,j} \in \mathcal{H}$

3.1.4

En déduire que pour tout i élément de $\{1,2,\dots,n\}$, $E_{i,i} \in \mathcal{H}$.

3.1.5

Conclure.

On a donc $I_n \in \mathcal{H}$; on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non nulle telle que : $\mathcal{H} = \text{Ker}T_A$.

3.2

Soit $M \in \mathcal{H}$. Montrer que $:Ker T_A \subset Ker T_{AM}$ et en déduire qu'il existe $\lambda_M \in \mathbb{C}$ tel que :

$$A(M - \lambda_M I_n) = O$$

3.3

En déduire que $\mathcal{H} \subset \mathcal{F} + \mathbb{C}I_n$ ou $\mathcal{F} = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}); AN = O\}$.

3.4

Vérifier que $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et qu'il est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), Ker \varphi_A)$ des applications linéaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $Ker \varphi_A$. ou φ_A désigne l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}); \varphi_A(X) = AX.$$

3.5

Montrer que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = n(n - rg(A))$ et en déduire que $nrg(A) \leq 2$.

3.6

Conclure que $n=2$.

3.7

Déterminer alors les hyperplans de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ stables par le produit matriciel. On remarque qu'un tel hyperplan est de la forme $Ker T_A$, avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle de trace nulle et en utilisant les résultats de la deuxième partie.