مباريات التوظيف بموجب عقود بالنسبة
للتعليم الثانوي بسلكيه الإعدادي والتأهيلي
نونبر 2016
الموضوع



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الاختبار	اختبار في مادة التخصص	مدة الإنجاز :	5 ساعات
التخصص	الرياضيات بج1	المعامل	1

Consignes générales

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants les uns des autres. Le candidat est libre de traiter le sujet dans l'ordre qui lui convient à condition de bien mentionner les références complètes de chaque question traitée.

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie.
Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions précédentes, il veillera toutefois à mentionner la référence du résultat utilisé.

Les calculatrices et tout matériel électronique ainsi que les documents sont interdits lors de cette épreuve.

Important

Si le candidat repère ce qu'il pense être une erreur de l'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les raisons qui l'ont amené à le penser. Ceci ne doit pas l'empêcher de finir son épreuve et il a le choix d'adopter les rectifications qu'il croit nécessaires ou pas.

Barème

EXERCICE 1	EXERCICE 2	EXERCICE 3	EXERCICE 4	Total
20 pts	15 pts	20 pts	25 pts	80 pts

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/993 - Wadifa Info - page 1/5

EXERCICE 1

1. Soit p un nombre premier $p > 2$.
   (a) Montrer que p est de la forme $4k-1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ ou bien de la forme $4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que si $p \geq 5$ alors $p^2 - 1$ est divisible par 24.
2. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
   (a) Montrer que si n est un entier naturel non nul, alors il existe toujours un nombre premier strictement compris entre n et $n! + 2$. (ind. considérer les diviseurs premiers de $n! + 1$).
   (b) En déduire que $\mathcal{P}$ est infini.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.
   (a) Montrer, si $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n > m$, que F_n et F_m sont premiers entre eux. (ind. exprimer F_n en fonction de F_m).
   (b) Retrouver à l'aide du (a) le fait que l'ensemble des nombres premiers est infini.
4. Soit $\mathcal{E} = \{4k-1 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathcal{E}$, il existe $p \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E}$ tel que p divise n.
   (b) En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k-1$ tel que $k \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 2

Le plan euclidien étant muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie I : Soit l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{i\} ; z \longmapsto \dfrac{iz+i}{z-1}$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer, en précisant leurs natures géométriques, les ensembles $f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$, $f(i\mathbb{R})$
3. Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Déterminer, en précisant sa nature géométrique, l'ensemble $f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$.

Partie II : On considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives:

$$z_A = 1 - 2i, z_B = 3 - i, z_{A'} = -2 + 4i \text{ et } z_{B'} = 5i$$

4. Placer ces quatres points dans le plan, et montrer que $ABB'A'$ est un rectangle.
5. Soit g la similtude $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \longmapsto a\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ telle que $g(z_A) = z_{A'}$ et $g(z_B) = z_{B'}$.
   (a) Déterminer les complexes a et b sous leurs formes algébriques.
   (b) Déterminer la nature et une équation cartésienne de l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ tels que $g(z) = z$.
   (c) Représenter graphiquement (Δ) sur la même figure que les points A, B, B' et A'.
   (d) Reconnaissez-vous la nature de g?

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/993 - Wadifa Info - page 2/5

EXERCICE 3

Soit f une fonction continue sur $]0,+\infty[$, on définit la fonction G_f sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[: G_f(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t} dt.$$

1. Montrer que G_f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

2. Déterminer la fonction G_f pour f constante égale à 1.

3. Dans cette question on suppose que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0^+ :

$$\forall t \in]0,+\infty[: f(t) = a + bt + ct^2 + t^2\varepsilon(t)$$
avec ε fonction continue sur $]0,+\infty[$ et $\lim_{t\to 0^+} \varepsilon(t) = 0$.

Déterminer le développement limité en 0^+ à l'ordre 2 de G_f.

4. Montrer, en utilisant la définition de la limite, que si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} G_f(x) = 0$.

Dans la suite on note G la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[: G(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

5. Calculer la dérivée de G et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0,2\pi]$.

6. Ecrire le développement limité de la fonction cosinus à l'ordre 2 en 0, et en déduire celui de la fonction G.

7. Montrer alors que G est prolongeable par continuité en une fonction dérivable, puis déterminer la position de la courbe de G par rapport à sa tangente en 0.

8. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a:

$$G(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

9. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = 0$ et en déduire $\lim_{x\to+\infty} G(x)$.

10. Construire l'allure du graphe de G sur l'intervalle $[0,2\pi]$.
On donne les valeurs approchées suivantes:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t} dt \simeq -0.67; \int_{\pi}^{3\pi} \frac{\cos(t)}{t} dt \simeq -0.06; \int_{3\frac{\pi}{2}}^{9\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t} dt \simeq 0.27;$$
$$\int_{2\pi}^{6\pi} \frac{\cos(t)}{t} dt \simeq 0.02; \ln 3 \simeq 1.10.$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/993 - Wadifa Info - page 3/5

EXERCICE 4

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, et T l'application de E dans E définie par :

$$\forall f \in E, \forall x \in]0,1[: T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

1. Vérifier que T est un endomorphisme de E.

2. Calculer la fonction $T(u)$ (en fonction de u) où u est la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$\forall x \in]0,1[: u(x) = \operatorname{cotan} \pi x .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1[$, on pose

$$v_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k} \text{ et } w_n(x) = v_n(x) - \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} .$$

3. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1[$

$$v_n(x) = \frac{1}{x} - 2x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - x^2}$$

et que les fonctions v_n et w_n sont continues sur $]0,1[$.

4. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ les suites $(v_n(x))_{n\geq 1}$ et $(w_n(x))_{n\geq 1}$ sont adjacentes. On notera $v(x)$ leur limite commune :

$$v(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} .$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est une fonction décroissante sur $]0,1[$, et en déduire que v est aussi décroissante sur $]0,1[$.

6. Déduire de ce qui précède que v est continue sur $]0,1[$.

7. Établir une relation entre $T(v_n)$ et v_{2n} puis en déduire que $T(v) = 2v$.

8. Dans cette question, on considère une fonction f continue sur $[0,1]$ telle que :

$$\forall x \in [0,1] : f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x).$$

(a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = \max\{f(x) \mid x \in [0,1]\}$, qu'on note M, et que $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = M$.

(b) En déduire que f atteint son maximum au point 0.

(c) Montrer que f atteint aussi son minimum au point 0. Que peut-on déduire pour la fonction f.

9. Comment choisir le réel a pour que la fonction $f = v - au$ soit pronlongeable en une application $\tilde{f}$ continue et périodique de période 1 sur $\mathbb{R}$?

10. Déduire de tout ce qui précède que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} : \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} = \pi \operatorname{cotan} \pi x .$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/993 - Wadifa Info - page 4/5

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة التعليم - مسلك تأهيل أساتذة التعليم الثانوي الإعدادي والتأهيلي، تخصص اللغة العربية -

Modèle : Concours de l'enseignement – qualification des professeurs du secondaire – spécialité langue arabe –

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1319

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

www.wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me