L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Exercice
(Noté 4 points sur 20)

On pose $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ et pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.

1. a) Montrer que I_0 est une intégrale convergente et que $I_0 = 1$.

   b) Justifier que pour tout entier naturel n, $x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

   c) En déduire que pour tout entier naturel n, I_n est une intégrale convergente.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout réel positif A,

$$\int_0^A x^{n+1}e^{-x}dx = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A x^n e^{-x}dx$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

4. En déduire que pour tout entier naturel n, $I_n = n!$.

Problème 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ, $(\lambda > 0)$ si elle admet pour densité la fonction θ définie par $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie 1
Une variable aléatoire à densité

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est une intégrale convergente et que $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5626 - Wadifa Info - page 1/5

2. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

   Montrer que la fonction G est une fonction de répartition d'une variable aléatoire dont on déterminera une densité g.

3. Soit X une variable aléatoire admettant g pour densité. On pose $Y = X^2$.

   a) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   b) Déterminer, pour tout réel x, la probabilité $P(Y \leq x)$.
   (On distinguera les cas $x < 0$ et $x \geq 0$).

   c) Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

   d) Déterminer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.

   e) En déduire que la variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ que l'on déterminera.

Partie 2
Calcul de deux intégrales

1. Montrer pour tout réel x, la convergence des deux intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2}dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} 2t\sin(2xt)e^{-t^2}dt$$

Soient φ et ψ deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2}dt \quad \text{et} \quad \psi(x) = \int_0^{+\infty} 2t\sin(2xt)e^{-t^2}dt$$

2. a) Montrer que pour tous réels a et ε, on a l'inégalité $\left|\cos(a+\varepsilon) - \cos(a) + \varepsilon\sin a\right| \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$.

   b) Montrer que pour tous réels x et h, $\left|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h\psi(x)\right| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}h^2$.

   c) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée φ'.

3. a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout réel x, $\psi(x) = 2x\varphi(x)$.

   b) En déduire que pour tout réel x, $\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$ et $\psi(x) = x\sqrt{\pi}e^{-x^2}$.

Problème 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

Partie 1
Développement asymptotique de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$

1. a) Montrer que $(u_n - u_{n+1}) \sim \frac{1}{2n^2}$.

   b) En déduire que $\sum_{n\geq 1}(u_n - u_{n+1})$ est une série convergente.

   c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On note γ sa limite.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5626 - Wadifa Info - page 2/5

d) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

e) En déduire que $0 \leq \gamma \leq 1$.

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n - \gamma$.

a) Vérifier que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1} \right) \right)$.

b) En déduire que $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1} \right) - \frac{1}{k} \right)$.

c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n} \right)$.

3. On pose pour tout entier naturel non nul n, $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.

a) Donner un équivalent simple de $w_{n+1} - w_n$.

b) Vérifier que $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{2}{n^3}$ puis que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$.

c) Conclure que $H_n \doteq \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right)$.

Partie 2
Calcul d'une intégrale

On se propose de calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} (-\ln u) e^{-u} du$.

On pose pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k,

$$I_{n,k} = \int_0^n \ln(u) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^k du \quad \text{et} \quad I_n = I_{n,n}$$

1. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et k,

$$I_{n,k} = I_{n,k-1} + \int_0^n \left(\frac{-1}{n} \right) (u \ln(u)) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{k-1} du$$

2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k,

$$\frac{k+1}{k} I_{n,k} = I_{n,k-1} - \frac{n}{k(k+1)}$$

3. On pose pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k, $J_{n,k} = (k+1) I_{n,k}$.

a) Déterminer pour tous entiers naturels non nuls n et k, une relation entre $J_{n,k}$ et $J_{n,k-1}$.

b) En déduire pour tout entier naturel non nul n, I_n en fonction de n et u_n.

4. En admettant que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^n (-\ln u) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = \int_0^{+\infty} (-\ln u) e^{-u} du$, en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} (-\ln u) e^{-u} du$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5626 - Wadifa Info - page 3/5

Partie 3

Application à la loi de Gumbel

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \exp(-t - e^{-t})$.

1. a) Montre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et donner sa valeur, (on pourra utiliser la fonction $t \mapsto \exp(-e^{-t})$).

   b) Justifier que g est une densité d'une variable aléatoire qu'on notera X. La loi suivie par X est appelée loi de Gumbel.

   c) Déterminer F_X la fonction de répartition de X.

2. a) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\exp(-t - e^{-t})dt$.

   b) À l'aide du changement de variable $u = e^{-t}$, déterminer la valeur de $E(X)$.

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ, $(\lambda > 0)$ si elle admet pour densité la fonction θ définie par $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

   On pose $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $G_n = M_n - \ln(n)$. On note F_{M_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire M_n et F_{G_n} celle de la variable aléatoire G_n.

   a) Déterminer F_{X_1} la fonction de répartition de X_1.

   b) Déterminer la fonction F_{M_n}.

   c) En déduire la fonction F_{G_n}.

4. Montrer que la suite $(M_n - \ln n)_{n\geq 2}$ converge en loi vers X.

FIN DE L'ÉPREUVE

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5626 - Wadifa Info - page 4/5

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج معاهد التكوين المهني في الميدان الصحي (IFPS) - شعبة مساعد في العلاج

Modèle de concours : accès aux Instituts de Formation Professionnelle dans le domaine de la Santé (IFPS) – Ministère

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2215

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me