ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ
ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ ⴷ ⵓⵙⵏⴼⵍⵓ

المملكة المغربية
وزارة التعليم العالى
والبحث العلمي والابتكار

ROYAUME DU MAROC
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de l'Innovation

المدرسة الوطنية العليا للمعادن بالرباط
ⵜⵉⵏⵎⵍ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ ⵜⴰⵏⴰⴼⵍⴰⵜ ⵏ ⵉⵣⵓⵖⴰⵣ ⵕⵕⴱⴰⵟ
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE RABAT

وزارة الانتقال الطاقي
Ministère de la Transition Énergétique
والتنمية المستدامة
et du Développement Durable
Département de la Transition Energétique قطاع الانتقال الطاقي

MINES-RABAT

CNC 2022

Concours National Commun

d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Épreuve de **Mathématiques I**

Filière : **TSI**

Durée **4 heures**

wadifa-info.com
نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5607 - Wadifa Info - page 1/5

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice 1

Étude de suites récurrentes et application
(Noté sur 4 points sur 20)

Dans cet exercice, on considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée du couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} = u_n + v_n. \end{cases}$$

1.1. Première méthode de calcul des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire ses valeurs propres.

1.1.2. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.3. Montrer que la matrice P est inversible et calculer le produit matriciel $D = P^{-1}AP$.

1.1.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, puis en déduire les expressions des coefficients de la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1.1.5. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1.1.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, puis en déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Deuxième méthode de calcul des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1.2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$ et $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$.

1.2.2. Montrer que l'ensemble $F = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles, puis en donner la dimension et une base.

1.2.3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

1.3. Soit ρ un réel non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{\rho^n}{n!} z^n$, puis exprimer sa somme à l'aide de fonctions usuelles.

1.4. Pour chacune des séries entières $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{v_n}{n!} z^n$, déterminer le rayon convergence puis exprimer sa somme à l'aide de fonctions usuelles.

Tournez la page S.V.P.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5607 - Wadifa Info - page 2/5

Exercice 2

Développement d'une fonction en série de Fourier
Application au calcul de sommes de séries numériques

Dans cet exercice , les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont notées respectivement cosh *et* sinh. *On rappelle que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $2\pi-$périodique et telle que $f(x) = \cosh(\alpha x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

2.1. Montrer que la fonction f est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

2.2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

On note $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *et* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *les suites des coefficients de Fourier de la fonction* f.

2.3. Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = 0$, puis montrer que $a_0 = \dfrac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$.

2.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En effectuant deux intégrations par partie, montrer que

$$a_n = (-1)^n \frac{2\alpha \sinh(\alpha\pi)}{\pi(n^2 + \alpha^2)}.$$

2.5. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sinh(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 + \alpha^2}.$$

2.6. Justifier la convergence et calculer les sommes des séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+\alpha^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+\alpha^2}$.

2.7. Justifier la convergence et calculer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n^2+\alpha^2)^2}$.

Problème

Étude d'une équation différentielle linéaire

Dans ce problème, on s'interesse à la résolution de l'équation différentielle linéaire

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1 + x^2)^2 \ln x. \tag{1}$$

Par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.

1ère Partie

Résultats préliminaires utiles

1.1. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X^2+1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

1.2. En déduire les primitives sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

1.3. Donner une primitives sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto x \ln x$.

1.4. Donner une primitives sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto (1 - x^2) \ln x$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5607 - Wadifa Info - page 3/5

2ème Partie

Résolution de l'équation sans second membre

On s'interesse ici à l'équation différentielle linéaire homogène (2) suivante associée à (1) :

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{2}$$

2.1. Déterminer $\alpha > 0$ tel que la fonction $t \longmapsto t^\alpha$ soit solution de l'équation différentielle homogène (2).

2.2. Soit $\varphi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable ; on pose $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$, $x \in]0,+\infty[$.

2.2.1. Vérifier que la fonction ψ est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2.2.2. Montrer que la fonction φ est une solution de (2) si, et seulement si, la fonction ψ' est solution, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$z' + \frac{2}{x(x^2+1)}\, z = 0. \tag{3}$$

2.3. Résoudre l'équation différentielle (3) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2.4. Préciser l'ensemble Σ_0 des solutions, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle (2).

3ème Partie

Résolution de l'équation complète

On note Σ l'ensemble des solutions, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle (1).

3.1. On suppose que l'on connaît une solution φ_0 de l'équation différentielle (1). Montrer que

$$\Sigma = \{\varphi_0 + g \ ; g \in \Sigma_0\}.$$

3.2. Recherche d'une telle solution particulière φ_0

On cherche une solution particulière φ_0 de l'équation différentielle (1) sous la forme

$$\varphi_0 : x \longmapsto x\,\lambda(x) + (x^2-1)\,\mu(x),$$

où λ et μ sont des fonctions dérivables sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et vérifiant :

$$\forall\, x > 0, \quad x\,\lambda'(x) + (x^2-1)\,\mu'(x) = 0. \tag{4}$$

3.2.1. Montrer que la fonction φ_0 est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée φ_0' à l'aide des fonctions λ et μ.

3.2.2. En déduire que la fonction φ_0 est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde φ_0'' à l'aide des fonctions λ', μ et μ'.

3.2.3. Montrer que la fonction φ_0 est solution, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle (1) si, et seulement si,

$$\forall\, x > 0, \quad \lambda'(x) + 2x\,\mu'(x) = (1+x^2)\ln x. \tag{5}$$

3.2.4. Soit $x > 0$. Déterminer les expressions des réels $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$ en résolvant le système linéaire d'équations (4) et (5), d'inconnues $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$.

3.2.5. En déduire les expressions des fonctions λ et μ.

3.3. Préciser alors les solutions, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle (1).

Fin de l'épreuve

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5607 - Wadifa Info - page 4/5

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي - المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale – École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me