L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants. Les trois parties du problème sont indépendantes entre elles ; seule la formule (1) est utile pour traiter le problème.

Exercice
Un peu de probabilité
(Noté sur 4 points sur 20)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vérifiant $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et il existe $p \in]0,1[$ tel que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p\, q^k \quad \text{avec} \quad q = 1 - p.$$

1.1. Donner une interprétation de la variable aléatoire X.

1.2. Établir que la variable aléatoire X admet une espérance puis la calculer.

1.3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant k) = q^k$.

1.4. Étude de la variable aléatoire $X + Y$

1.4.1. Dans quel ensemble la variable aléatoire $X + Y$ prend-elle ses valeurs ?

1.4.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} P\big((X = k) \cap (Y = n - k)\big) = (n+1)p^2 q^n.$$

1.4.3. Soient n et k deux entiers naturels. Lorsque $k > n$, calculer la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k).$$

1.4.4. Supposons que $k \leqslant n$. Démontrer que

$$\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k) = \frac{1}{n+1}.$$

1.5. On considère les variables aléatoires V et M définies par :

$$V = Y - X \quad \text{et} \quad M = \min(X, Y),$$

où $\min(a, b)$ désigne le plus petit des deux réels a et b.

1.5.1. Dans quels ensembles les variables aléatoires V et M prennent-elles leurs valeurs ?

1.5.2. Pour tout entier naturel k, montrer que

$$\mathbb{P}(M \geqslant k) = q^{2k}.$$

1.5.3. En déduire la loi de la variable aléatoire M.

1.5.4. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$. Calculer la probabilité de l'événement $(M = k) \cap (V = r)$. *On pourra distinguer les deux cas $r < 0$ et $r \geqslant 0$.*

1.5.5. En déduire la loi de la variable aléatoire V.

1.5.6. Étudier l'indépendance des deux variables aléatoires M et V.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5599 - Wadifa Info - page 1/5

Problème

Quelques applications de la formule de Taylor avec reste intégrale

1ère Partie
Formule de Taylor avec reste intégrale
Une première application

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a, b) \in I^2$; on pose

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

2.1. Formule de Taylor avec reste intégrale

2.1.1. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$R_{k-1} = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k.$$

2.1.2. En déduire la formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégrale suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

2.2. Application au calcul de la somme d'une série

2.2.1. Montrer que pour tout réel x, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente.

2.2.2. Justifier que pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$, $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t$.

2.2.3. Montrer que, pour tout réel non nul x et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

2.2.4. En déduire la limite de la suite $\left(\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t \right)_{n\geqslant 1}$, pour tout réel x.

2.2.5. Montrer que pour tout réel x,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2ème Partie
Application à l'indépendance linéaire de la famille $(1, e, e^2)$

L'objet de cette partie est de montrer que dans $\mathbb{R}$, considéré comme $\mathbb{Q}-$espace vectoriel, la famille $(1, e, e^2)$ est libre.

3.1. Construction du nombre réel e, base du logarithme népérien

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!\,n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

3.1.1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On note e leur limite commune.

3.1.2. Justifier que $u_n < e < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1.3. Irrationalité de e

Raisonnant par l'absurde, on suppose que e est rationnel et on pose $e = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Vérifier que les nombres $q!\,u_q$ et $q!\,e$ sont des entiers et conclure à une contradiction.

3.2. Convergence d'une suite d'entiers

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5599 - Wadifa Info - page 2/5

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente d'entiers relatifs dont la limite est nulle. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad x_n = 0.$$

3.3. Application au résultat d'indépendance linéaire

Dans la suite de cette partie, on suppose qu'il existe trois nombres rationnels *α, β et γ tels que*

$$\alpha + \beta\, e + \gamma\, e^2 = 0.$$

On cherche à montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

3.3.1. Montrer qu'on peut supposer que les nombres α, β et γ sont des entiers relatifs.

On suppose désormais que les nombres α, β et γ sont des entiers relatifs et on considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha\, e^{-x} + \gamma\, e^{x}.$$

3.3.2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est $n-$fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \alpha\, e^{-x} + \gamma\, e^{x}.$$

3.3.3. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha\, e^{-1} + \gamma\, e = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma + (-1)^k \alpha}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \Big((-1)^{n+1} \alpha\, e^{-t} + \gamma\, e^{t} \Big)\, \mathrm{d}t\,.$$

3.3.4. On considère la suite numérique $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = \int_0^1 (1-t)^n \Big((-1)^{n+1} \alpha\, e^{-t} + \gamma\, e^{t} \Big)\, \mathrm{d}t\,.$$

Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3.3.5. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $n!\,\beta + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \big(\gamma + (-1)^k \alpha\big) = 0$, puis en déduire que

$$\forall\, n \geqslant n_0 + 1, \quad \gamma + (-1)^n \alpha = 0.$$

3.3.6. Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

3ème Partie
Majoration des normes uniformes des dérivées successives d'une fonction

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on désigne par $\mathscr{F}_n$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telles que f et sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$.

Pour tout élément f de $\mathscr{F}_n$, on pose $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$.

L'objet de cette partie est d'établir que $\mathscr{F}_n$ est inclus dans $\mathscr{F}_k$ pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, puis d'obtenir une majoration de $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ en fonction de M_0 et M_n.

4.1. Étude du cas $n = 2$

Soit f une application **non constante** de $\mathscr{F}_2$. On rappelle que f et sa dérivée seconde f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

4.1.1. Montrer que $M_2 > 0$ et que $M_0 > 0$.

4.1.2. Soit x un réel et soit $h > 0$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, à un ordre à préciser, trouver un majorant des quantités $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)|$ et $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)|$ en fonction de M_2 et h, puis en déduire que

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2\, h}{2}.$$

4.1.3. Montrer que l'application f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

On pourra étudier la fonction $t \longmapsto \dfrac{M_0}{t} + \dfrac{M_2}{2}\, t$ définie sur $]0, +\infty[$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5599 - Wadifa Info - page 3/5

4.2. Étude des inclusions $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et tout $n \geq 2$

Soit n un entier $\geqslant 2$ et soit f une application **non constante** de $\mathscr{F}_n$. On rappelle que f et sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$.

4.2.1. Soit x un réel et soit $h > 0$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, à un ordre à préciser, montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) \right| \leqslant 2M_0 + \frac{M_n h^n}{n!} .$$

4.2.2. En déduire que, pour tout $h > 0$ fixé, la fonction $F_h : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et exprimer un majorant de $\|F_h\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_h(x)|$ à l'aide de M_0, M_n et h.

4.2.3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soient $h_1, \dots, h_{n-1}$ des réels deux à deux distincts tels que $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_{n-1}$; on note B_{n-1} le vecteur colonne de composantes $F_{h_1}(x), F_{h_2}(x), \dots, F_{h_{n-1}}(x)$ et H_{n-1} la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$H_{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{h_1}{1!} & \frac{h_1^2}{2!} & \cdots & \frac{h_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ \frac{h_2}{1!} & \frac{h_2^2}{2!} & \cdots & \frac{h_2^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_{n-1}}{1!} & \frac{h_{n-1}^2}{2!} & \cdots & \frac{h_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}.$$

(i) Calculer le déterminant de la matrice H_{n-1} et justifier qu'elle est inversible.

(ii) Vérifier que le vecteur $(f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$ est solution du système linéaire $H_{n-1}X = B_{n-1}$, d'inconnue X.

(iii) Déduire de ce qui précède que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, la fonction $f^{(k)}$ s'exprime comme combinaison linéaire des fonction $F_{h_1}, F_{h_2}, \dots, F_{h_{n-1}}$.

4.2.4. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_k$.

Dans la suite, on pose $M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

4.2.5. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $M_k > 0$ et que $M_k \leq \sqrt{2M_{k-1}M_{k+1}}$.

4.2.6. Majoration de M_k en fonction de M_0 et M_n, pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose $a_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$.

(i) Vérifier que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_k \leq a_{k+1}$.

(ii) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $(a_1 \cdots a_k)^n \leq (a_1 \cdots a_n)^k$.

(iii) En déduire que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$.

On pourra poser $a_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$ *, $1 \leq k \leq n$, et montrer que* $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ *et que* $(a_1 \cdots a_k)^n \leq (a_1 \cdots a_n)^k$ *pour tout* $k \in \{1, \dots, n\}$.

Fin de l'épreuve

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/5599 - Wadifa Info - page 4/5

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي - المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale – École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me