
CONCOURS D'ADMISSION EN PREMIÈRE ANNÉE

FILIÈRE : C.U.E.S – D.E.U.G.

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Lundi 12 juillet 2021

Durée 3 heures

la présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document

L'épreuve comporte deux parties indépendantes à rédiger sur des feuilles séparées

PARTIE I : ANALYSE

Le but de ce problème est d'étudier le comportement asymptotique des racines de la dérivée du polynôme de degré $n + 1$,

$$P_n(X) = X(X - 1) \cdots (X - n)$$

lorsque n tend vers l'infini.

On notera $\cot$ la fonction définie sur $]0, \pi[$ par

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Cette fonction est une bijection de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}$. On notera Arccot sa fonction réciproque. Pour tout réel x , $[x]$ désignera la partie entière de x . On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Quelques propriétés des racines de P'_n

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, P'_n admet exactement une racine $x_{n,k}$ dans chacun des intervalles $]k, k + 1[$, pour $k = 0, \dots, n - 1$. Notons $\alpha_{n,k} = x_{n,k} - k \in]0, 1[$, la partie fractionnaire de $x_{n,k}$.

2) Pour $n \geq 1$, en calculant les coefficients de degré $n - 1$ et n de P'_n , exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k}$, puis

$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}$ en fonction de n .

3) En comparant $P_n(X)$ et $P_n(n - X)$, exprimer $x_{n,n-1-k}$ en fonction de $x_{n,k}$, pour tout $n \geq 1$, et pour tout $k = 0, \dots, n - 1$.

4) Déterminer la valeur de $\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k}$

Le but des questions suivantes est de montrer que, n étant fixé, la suite des $\alpha_{n,k}$ croît lorsque k croît de 0 à $n - 1$.

5) Pour tout $n \geq 1$, dresser, en fonction de la parité de n , le tableau de variations de P_n . On y fera apparaître les réels $x_{n,k}$ pour $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ainsi que les entiers $0, 1, \dots, n$.

6) En déduire le signe de $(-1)^{n-k} P_n(x_{n,k})$ pour $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

7) En utilisant la relation $P_n(X) = (X - n)P_{n-1}(X)$, déterminer le signe de $(-1)^{n-k} P'_n(x_{n-1,k})$ pour $k = 0, 1, \dots, n - 2$.

8) En déduire que pour $k = 0, 1, \dots, n - 2$, on a $x_{n-1,k} > x_{n,k}$.

- 9) En utilisant l'identité $P_n(X) = X P_{n-1}(X - 1)$, déterminer, en fonction de k et n , le signe de $(-1)^{n-k} P'_n(1 + x_{n-1,k-1})$ pour $k = 1, \dots, n - 1$.
- 10) En déduire que pour $k = 1, \dots, n - 1$, on a $x_{n,k} > 1 + x_{n-1,k-1}$.
- 11) Conclure.

II. Un développement asymptotique

Pour $x > 0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Montrer que Γ est strictement positive et deux fois dérivable pour $x > 0$.

12) On admet que la fonction Γ satisfait, les formules :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad x \in]0; 1[\quad \text{et} \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

Désormais, on pose, pour tout $x > 0$

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

13) Montrer que Ψ est strictement croissante.

14) Établir, que pour tout $x > 0$,

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}.$$

On pose pour tout $x > 0$,

$$\phi(x) = \Psi(x) - \ln(x)$$

15) Montrer que la série de terme général $(\phi(n+1) - \phi(n))$ converge.

16) Montrer que la suite $(\phi(n); n \geq 1)$ converge lorsque l'entier n tend vers l'infini. Soit C sa limite.

17) Montrer que si $C \neq 0$

$$\int_1^x \phi(t) dt \approx Cx \quad \text{au voisinage de } +\infty$$

18) Montrer que $C = 0$.

PARTIE II : ALGÈBRE

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Dans tout le problème, on munit l'espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{R})$, des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels, de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$

pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $\|\cdot\|$ la norme correspondante au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

On rappelle que $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et I_n la matrice identité; on munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa norme usuelle, encore notée $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|AX\|}{\|X\|} / X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\} \right\} \text{ pour tout } A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ sera dite *s-positive* si l'on a $\langle AX | X \rangle \geq 0$ pour tout X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Une matrice A dans $M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^t A = A$, elle est dite anti-symétrique si ${}^t A = -A$.

On note $S_n(\mathbb{R})$ et $AS_n(\mathbb{R})$ les ensembles des matrices symétriques et anti symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ respectivement.

1. Montrer qu'une matrice symétrique réelle est s-positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
2. Vérifier soigneusement que $S_n(\mathbb{R})$ et $AS_n(\mathbb{R})$ sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de $M_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite du problème, le candidat peut utiliser le résultat suivant :

Toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique A_s et d'une matrice antisymétrique A_a .

3. Montrer que pour toute matrice $A = A_s + A_a$ de $M_n(\mathbb{R})$, où A_s est symétrique et A_a est anti symétrique, on a l'équivalence :
 A est s-positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A_s sont positives.
4. Montrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ s-positive et tout $\mu \in]0, +\infty[$, la matrice $M + \mu \cdot I_n$ est inversible.
 On posera alors $R_\mu(M) = (\mu \cdot I_n + M)^{-1}$.
5. On considère les deux cas suivants et on prend toujours $\mu > 0$:

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (i) Pour chacun de ces exemples, déterminer, en le justifiant, $\text{Ker } M$, $\text{Im } M$ et $R_\mu(M)$.
- (ii) Pour chacun des deux exemples, dire, en justifiant, si $\lim_{\mu \rightarrow 0} R_\mu(M)$ existe et calculer son éventuelle valeur.
- (iii) Pour chacun des deux exemples, dire, en justifiant, si $\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu \cdot R_\mu(M)$ existe et calculer son éventuelle valeur.

Dans toute la suite, on se donne une matrice s -positive M et un réel $\mu > 0$.

6. Démontrer les résultats suivants :
 - a) $M \cdot R_\mu(M) = R_\mu(M) \cdot M = I_n - \mu \cdot R_\mu(M)$.
 - b) Pour tout réel $\theta > 0$, on a $R_\mu(M) - R_\theta(M) = (\theta - \mu)R_\theta(A) \cdot R_\mu(A)$.
7. Démontrer l'inégalité $\|R_\mu(M)\| \leq \frac{1}{\mu}$, avec égalité si et seulement si $\det M = 0$.
8. Démontrer les assertions suivantes :
 - a) Pour tout $x \in \text{Im } M$, $\mu \cdot R_\mu(M) \cdot x \rightarrow 0$ lorsque $\mu \rightarrow 0$.
 - b) L'espace $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est somme directe de $\text{Ker } M$ et $\text{Im } M$.
 - c) Lorsque μ tend vers 0, $\mu \cdot R_\mu(M)$ tend vers le projecteur sur $\text{Ker } M$ parallèlement à $\text{Im } M$.
9. Montrer que l'application $\Phi : \mu \mapsto R_\mu(M)$ de $]0, +\infty[$ dans $M_n(\mathbb{R})$ est indéfiniment dérivable, et exprimer ses dérivées successives $\Phi^{(p)}$ en fonction de ses puissances $\Phi^q : \mu \mapsto \Phi(\mu)^q$.