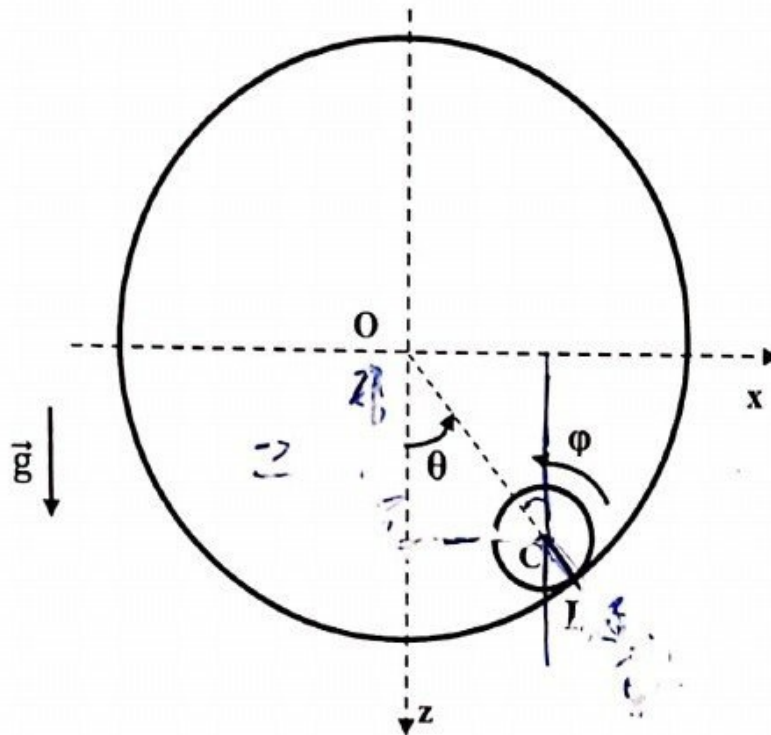


Partie 1 : Mécanique

Dans un référentiel terrestre R galiléen de base cartésienne $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on étudie le mouvement sans glissement d'un cylindre plein (C) à l'intérieur d'un cylindre fixe creux de rayon R de centre O et d'axe (Oy) . Le cylindre mobile (C) est homogène de masse m , de rayon r , de centre C , de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mr^2$ par rapport à son axe horizontal (Cy) .

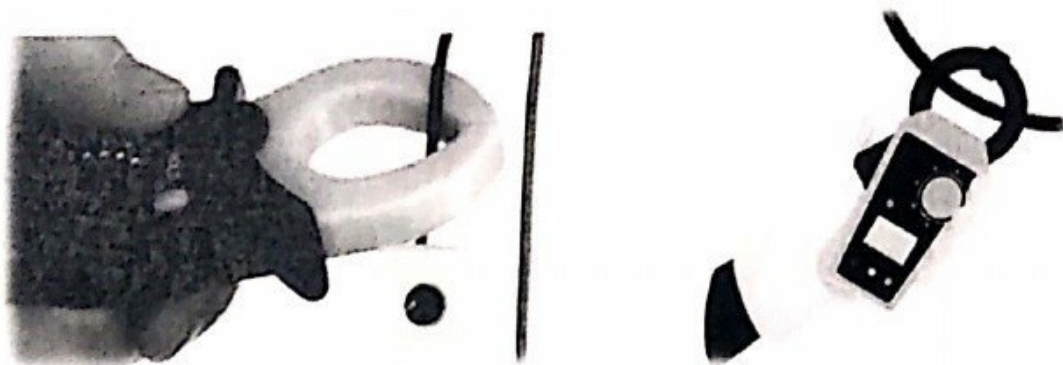
On note θ l'angle orienté entre (Oz) et (OC) et ϕ l'angle de rotation du cylindre mobile (C) dans le repère barycentrique $(Cxyz)$. I est le point de contact entre les deux cylindres, $\vec{N}$ et $\vec{T}$ sont les composantes normale et tangentielle de la force exercée par le cylindre fixe sur le cylindre mobile. L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur d'accélération uniforme, caractérisé par le vecteur $(\vec{g})$.



- 1) Ecrire la relation entre $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, R et r traduisant la condition de roulement sans glissement.
- 2) Calculer l'énergie cinétique E_c du cylindre (C) en fonction de m , R , r et $\dot{\theta}$.
- 3) Calculer l'énergie potentielle de pesanteur E_p du cylindre (C) .
- 4) Justifier le fait que l'énergie mécanique du cylindre (C) est constante. En déduire l'équation différentielle du mouvement de (C) .
- 5) On se place dans l'hypothèse des oscillations de faible amplitude. Montrer que le mouvement de (C) est sinusoïdal.
- 6) Donner l'expression de la période T de ce mouvement en fonction de R , r et g .
- 7) On applique au cylindre une vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega_0$ à $\theta = 0$, quelle est la valeur que doit avoir cette vitesse pour que le cylindre fasse un tour complet ?
- 8) Discuter les différents cas de mouvements du cylindre en fonction de la valeur de ω_0 .
- 9) Donner l'équation du mouvement du cylindre en présence de glissement.

Partie 2 : Electricité

La pince ampèremétrique permet de mesurer de l'intensité de courant électrique sans ouvrir le circuit à étudier. L'ouverture de la pince ampèremétrique permet d'insérer dans sa boucle le fil parcouru par le courant souhaité sans interrompre le circuit. En cas de fermeture de la pince, ses deux mâchoires forment une bobine. Les bornes de cette bobine reçoivent une tension directement liée à l'intensité à mesurer.



On considère un tore de section rectangulaire est obtenu par rotation autour de l'axe (xx') d'un rectangle de hauteur h et de largeur $(b - a)$. Il est situé à une distance a de l'axe (voir figure 1 et 2).

Pour fabriquer une bobine torique, on enroule régulièrement N spires serrées de fil conducteur autour de ce tore. Chaque spire peut être considérée comme étant dans un plan radial (voir figure 1).

On suppose qu'il y a un fil rectiligne infini placé sur l'axe (xx') de la bobine torique et que ce fil se referme à l'infini (à une distance suffisamment loin du tore).

On considère le système de coordonnées cylindriques (r, θ, x) d'axe OX et de base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_x)$

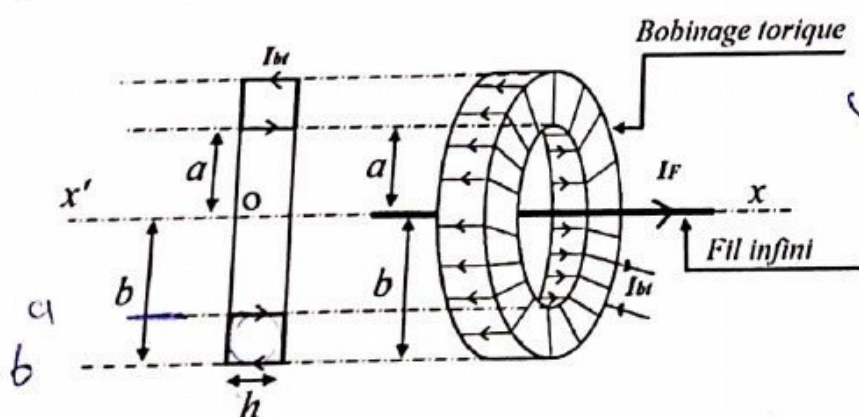


Figure 1
(Vue en coupe)

Figure 2
(Vue en perspective)

L'espace est assimilé au vide de permittivité électrique ϵ_0 et de perméabilité magnétique μ_0 .

1) Donner les équations de Maxwell dans le vide. En déduire les formes intégrales correspondantes en spécifiant le nom.

2) Les extrémités du bobinage torique sont connectées à un générateur qui fournit un courant variable $I_{bt}(t)$. Les figures 1 et 2 montrent le sens du courant $I_{bt}(t)$. À l'extérieur du bobinage torique, les extrémités du fil infini sont reliées entre elles.

a) Etudier les symétries et les invariances pour le champ magnétique $\vec{B}_{bt}(\mathbf{M}, t)$ créée par le bobinage torique en un point $\mathbf{M}$ quelconque de l'espace.

b) En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour qu'on précisera. Montrer que le champ magnétique est nul à l'extérieur du tore. Montrer que le champ magnétique vaut $\vec{B}_{bt}(\mathbf{M}, t) = \frac{\mu_0 N I_{bt}(t)}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{u}_\theta$ à l'intérieur du bobinage torique.

c) Montrer que le flux du champ magnétique $\Phi_{bt}(\mathbf{M}, t)$ à travers le bobinage torique est donné par : $\Phi_{bt}(\mathbf{M}, t) = \frac{\mu_0 N^2 I_{bt}(t)}{2\pi} h \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

d) En déduire le coefficient d'auto-induction L_{bt} de ce bobinage. Indication : $\Phi_{bt} = L_{bt} \cdot I_{bt}$

e) Retrouver l'expression du coefficient d'auto-induction L_{bt} du bobinage torique à partir d'une considération énergétique.

f) Donner l'expression du coefficient de mutuelle inductance M_{t-f} correspondant aux effets d'induction dans le fil infini dus aux variations du courant électrique dans le bobinage torique.

3) Les bornes du fil infini sont reliées à un générateur qui fournit un courant variable $I_F(t)$. La figure 2 montre le sens du courant $I_F(t)$. Les extrémités de la bobine torique sont reliées entre elles.

a) Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}_F(\mathbf{M}, t)$ créée par le fil infini.

b) Donner l'expression du coefficient de mutuelle inductance M_{f-t} correspondant aux effets d'induction dans le tore dus aux variations du courant dans le fil infini. Commenter.

c) Expliquer brièvement et qualitativement pourquoi (à cause de quel phénomène physique) il va y avoir présence d'un courant $I_{bt}(t)$ dans le bobinage torique.

4) Le fil infini est parcouru par un courant sinusoïdal de pulsation ω tel que $I_F(t) = \sqrt{2} I_e \cos(\omega t)$, avec I_e et ω des constantes. La résistance électrique de la bobine torique est notée R .

a) Les extrémités du bobinage torique sont reliées aux bornes d'un ampèremètre. Représenter le schéma électrique équivalent du dispositif.

b) Etablir l'équation différentielle reliant $I_F(t)$ et $I_{bt}(t)$. En déduire la valeur efficace du courant indiquée par l'ampèremètre en fonction de N et I_e pour $R \ll L_{bt}\omega$.

c) Maintenant les extrémités du bobinage torique sont reliées aux bornes d'un voltmètre. Donner l'expression de la tension efficace U_{eff} indiquée par ce voltmètre. Interpréter

5) Quels sont les avantages de la mesure du courant par cette pince par rapport à l'utilisation d'un ampèremètre ?