
CONCOURS D'ADMISSION EN PREMIÈRE ANNÉE

DEUG ET LICENCE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Lundi 15 juillet 2024

Durée: 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'usage de la calculatrice et aussi interdit.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

N.B: L'épreuve comporte deux parties indépendantes à rédiger sur des feuilles séparées

Nombre de pages: 6

I. Partie Algèbre

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A et en déduire que A possède une seule valeur propre λ à préciser
2. Déterminer $\text{Ker}(v - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^3})$, le sous-espace propre de v associé à son unique valeur propre λ
3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? Est-elle triangonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
4. On considère l'endomorphisme $u = v - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ et on pose $e_1 = (1, 0, 0)$
 - 4.1 Montrer que l'endomorphisme u est nilpotent, c'est à dire, il existe un entier $d \geq 1$ tel que $u^d = 0$
 - 4.2 Déterminer le noyau de l'endomorphisme u^2 puis vérifier que $e_1 \notin \text{Ker } u^2$
 - 4.3 Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u^2(e_1), u(e_1), e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice T de v dans la base $\mathcal{B}$, puis exprimer la matrice A en fonction de T
 - 4.4 Calculer l'exponentielle de la matrice A . On rappelle que $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$

Problème

Dans ce problème, $M_2(\mathbb{K})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $GL_2(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $M_2(\mathbb{K})$. Une matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$ est dite scalaire si elle est de la forme $A = \lambda I_2$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et I_2 la matrice identité de $M_2(\mathbb{K})$.

$f \circ g$ se note fg . Les deux parties du problème s'enchaînent entre elle.

1^{ère} partie : Caractérisation des homothéties en dimension 2, Application au commutant

E désigne un espace vectoriel de dimension E et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E . Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f : $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) ; fg = gf\}$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
 - 1.1. Montrer que, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
 - 1.2. Soit (e_1, e_2) une base de E ; montrer que $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.
 - 1.3. On pose $\lambda = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$. Montrer que $f = \lambda \text{id}_E$ (homothétie de rapport λ).
2. Soit f un endomorphisme de E .
 - 2.1. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

- 2.2. Déterminer $\mathcal{C}(f)$ si f est une homothétie.
3. Soit f un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.
 - 3.1. Justifier qu'il existe $e \in E$ tel que la famille $(e, f(e))$ soit une base de E .
 - 3.2. Si $g \in \mathcal{L}(E)$, justifier qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $g(e) = \alpha e + \beta f(e)$ et montrer que $g \in \mathcal{C}(f)$ si, et seulement si, $g = \alpha \text{id}_E + \beta f$.
 - 3.3. Préciser $\mathcal{C}(f)$; quelle est sa dimension ?
4. Traduction matricielle : Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$; on pose $\mathcal{C}(A) = \{M \in M_2(\mathbb{K}); AM = MA\}$.
 - 4.1. Si A est une matrice scalaire, déterminer $\mathcal{C}(A)$.
 - 4.2. Si A n'est pas une matrice scalaire, montrer que $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$; quelle est sa dimension ?

2^{ème} partie : Diagonalisation simultanée dans $M_2(\mathbb{K})$

1. Pour quels triplets $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{K})$?
2. Donner alors un exemple de matrice de $M_2(\mathbb{K})$ qui n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{K})$.
3. Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; montrer que la matrice A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{K})$ si, et seulement si, la matrice $A + \lambda I_2$ l'est aussi.
4. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_2(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.
 - 4.1. Montrer que les matrices A et B sont simultanément diagonalisables dans $M_2(\mathbb{K})$, c'est à dire qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que les matrices PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales. On pourra remarquer que $B \in \mathcal{C}(A)$ et traiter à part le cas où A est une matrice scalaire.
 - 4.2. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $A + \lambda B$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{K})$.
5. Familles de matrices diagonalisables
 - 5.1. Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de matrices diagonalisables de $M_2(\mathbb{K})$. On suppose en outre que ces matrices commutent deux à deux: $\forall (i, j) \in I^2, A_i A_j = A_j A_i$. Montrer que les matrices $A_i, i \in I$, sont simultanément diagonalisables dans $M_2(\mathbb{K})$, c'est à dire qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $i \in I$, la matrice $PA_i P^{-1}$ soit diagonale. On pourra traiter à part le cas où toutes ces matrices sont scalaires.
 - 5.2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $A_1, \dots, A_m$ sont des matrices involutives de $M_2(\mathbb{K})$ qui commutent deux à deux, alors $m \leq 4$. On rappelle que $M \in M_2(\mathbb{K})$ est dite involutive si $M^2 = I_2$.
6. On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$, où a et d sont des nombres réels.
 - 6.1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $J + \lambda K$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.
 - 6.2. Est-ce que les matrices J et K commutent entre elles ?

II. Partie Analyse: À rédiger sur une feuille à part

1^{ère} partie

1. On considère une suite de réels (a_n) , une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k ; B_n = \sum_{k=0}^n b_k.$$

En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \text{ (Transformation d'Abel).}$$

2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

- 2.1. Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.
- 2.2. En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k b_k)$ converge.
- 2.3. En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

3. Exemple.

Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- 3.1. Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$.
 - 3.2. Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.
4. Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul,

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si, les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $Re(u_n)$ et $Im(u_n)$) convergent.

On notera U sa fonction somme : pour tout réel x , $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

2^{ème} partie

Pour toute cette partie, on définit une famille d'équations différentielles $F(\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ par:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Et par "solution d'une équation différentielle", on fait référence aux solutions à valeurs réelles.

1. Soit x un réel.

1.1. Étudier, selon les valeurs de x , l'intégrabilité sur l'intervalle $]0, 1]$ de la fonction :

$$t \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$$

1.2. Montrer que cette même fonction est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

2. A quelle condition, nécessaire et suffisante, sur le complexe z la fonction $t \rightarrow t^{z-1} e^{-t}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

3. On pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$, $z \in \mathbb{C}$ et $\operatorname{Re}(z) > 0$.

3.1. Soit z un complexe tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$; montrer que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

3.2. En déduire, pour tout réel $\alpha > -1$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'identité

$$\Gamma(\alpha + p + 1) = (\alpha + p)(\alpha + p - 1) \dots (\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1).$$

3.3. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.

3.4. Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n .

4. Soit z un complexe tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$; montrer soigneusement que

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Cette formule permet de prolonger la fonction Γ à la partie $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ du plan complexe.

5. Montrer que la fonction $x \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ et qu'elle y est continue.

6. Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$, et soit $t > 0$.

6.1. Déterminer $\max(t^{a-1}, t^{b-1})$ selon les valeurs de t

6.2. Montrer que

$$\forall x \in [a, b], 0 \leq t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$

6.3. En déduire que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.

7. Soient $\lambda \geq 0$, α un réel et $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $x \in]0, R[$, on pose

$$y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^{n+\alpha}$$

7.1. On suppose que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) et que $a_0 \neq 0$. Montrer que

$$\alpha^2 = \lambda^2, ((\alpha + 1)^2 - \lambda^2)a_1 = 0, \text{ et } \forall n \geq 0 \ ((\alpha + n)^2 - \lambda^2)a_n = \alpha_{n-2}$$

7.2. On suppose que $\alpha = \lambda$ et que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) avec $a_0 \neq 0$. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0 \text{ et } a_{2p} = \frac{a_0 \Gamma(\alpha+1)}{2^{2p} p! \Gamma(\alpha+p+1)}$$

7.3. Les a_n étant ceux trouvés précédemment ; calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$.