# ROYAUME DU MAROC

## Ecole Hassania des Travaux Publics

Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du CUES ou DEUG (option MP)

- Epreuve de Mathématiques
- Durée : 4h

Lundi 5 Juillet 2004

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4926 - Wadifa Info - page 1/6

Epreuve de Mathématiques

Durée 4 heures

Préambule

Le sujet comporte deux problèmes indépendants.
Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Pour chaque question de ces problèmes, on appellera " *solution convenable* " toute suite finie d'affirmations correctement justifiées, et très lisiblement écrites. Seules les " *solutions convenables* " seront notées positivement.
*Il sera tenu le plus grand compte dans la notation de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle.*

*Premier problème*

# Partie I :un exemple

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{Arctan}x$ et pour $x > 0$, on pose $g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x t^2\text{Arctan}t\,dt$.

1. Etudier la fonction $f$ et tracer son graphe (en précisant les éventuelles asymptotes et la position du graphe de $f$ par rapport à celles-ci).

2. Calculer $g(x)$ pour $x \neq 0$ et montrer que $g$ peut être prolongée par continuité en 0. (On continue à appeler $g$ la fonction ainsi prolongée).
Vérifier que $g$ est développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ que l'on précisera et donner ce développement. Prouver que $g$ est indéfiniment dérivable (c'est à dire de classe $C^\infty$) sur $\mathbb{R}$.

3. Etudier la fonction $g$ et tracer son graphe (en précisant les éventuelles asymptotes et la position du graphe de $g$ par rapport à celles-ci).

# Partie II

Dans toute la suite du problème, on désigne par $E = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et par $\alpha$ un réel tel que $\alpha > 0$.
Pour tout $f$ de $E$, on désigne par $\Phi_\alpha(f)$ l'application $g$ de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(0) = \frac{f(0)}{\alpha} \quad \text{et pour } x > 0 \quad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1} f(t)\,dt$$

4. (a) Vérifier que pour tout élément $f$ de $E$, $g = \Phi_\alpha(f)$ est élément de $E$.

   (b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\Phi_\alpha(f)(x) = \int_0^1 u^{\alpha-1} f(xu)\,du$.

   (c) On suppose $f$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et on pose $g = \Phi_\alpha(f)$. Montrer que $g$ est aussi de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $g'$ en fonction de $\Phi_{\alpha+1}(f')$.
   Montrer que $g$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ si $f$ l'est.



Tournez la page S.V.P.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4926 - Wadifa Info - page 2/6

5. (a) Montrer que $\Phi_\alpha$ est un endomorphisme injectif de $E$.

(b) Soit $f$ un élément de $E$ et $g = \Phi_\alpha(f)$. Montrer que $g$ est dérivable en tout point $x > 0$ et exprimant $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$.

(c) Déterminer les valeurs propres de $\Phi_\alpha$, en précisant les différents sous-espaces propres (on pourra former une équation différentielle vérifiée par $f$ fonction propre associée à une valeur propre).

(d) Montrer que $\Phi_\alpha$ n'est pas surjective

6. Soit $f$ un élément de $E$ et $g = \Phi_\alpha(f)$. On suppose qu'il existe $R > 0$ et une suite réelle $(a_n)$ tels que pour tout $x \in [0, R[$ , $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer qu'il existe une suite réelle $(b_n)_n$ (que l'on explicitera) telle que pour tout $x \in [0, R[$ , $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

7. Dans cette question seulement, on pose $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ et on pose $g = \Phi_\alpha(f)$.

(a) En prenant $R = 1$, expliciter les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ correspondantes à la situation de la question 6.

(b) Montrer que $g$ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' + \alpha y = \dfrac{1}{1+x}$, $g$ étant la seule solution à avoir une limite finie en 0.

(c) Montrer que $g$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et préciser sa limite en $+\infty$. (On pourra distinguer les cas $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$ en cherchant à majorer simplement $g(x)$ pour $x > 0$)

(d) Déterminer une relation entre $\Phi_\alpha(f)$ et $\Phi_{\alpha+1}(f)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} x\Phi_{\alpha+1}(f)(x)$.

8. Dans cette question seulement, on suppose $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $f(t) = e^{-t}$ et on note $g = \Phi_\alpha(f)$. Exprimer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n g(x)$ en utilisant une factorielle et en déduire un équivalent simple de $g(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

9. Soient $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$

(a) Soit $f$ dans $E$. Grâce à une intégration par parties que l'on précisera, montrer que :

$$(\alpha - \beta)\Phi_\alpha(\Phi_\beta(f)) = \Phi_\beta(f) - \Phi_\alpha(f)$$

(b) En déduire que les endomorphismes $\Phi_\alpha$ et $\Phi_\beta$ commutent.

10. Soit un entier naturel $n$. On désigne par $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $E$ constitué des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à $n$.

(a) Montrer que si $f$ est dans $\mathcal{P}_n$, alors $g = \Phi_\alpha(f)$ l'est aussi.

(b) Vérifier que la restriction de $\Phi_\alpha$ à $\mathcal{P}_n$ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{P}_n$.

(c) On suppose $n = 2$. Déterminer le nombre d'endomorphismes $\theta$ de $\mathcal{P}_2$ tels que $\theta^2 = \Phi_\alpha$.

11. Soit $f$ un élément de $E$ et $g = \Phi_\alpha(f)$. On suppose que $f$ tend vers le réel $L$ en $+\infty$. Montrer que $g$ admet une limite réelle en $+\infty$ que l'on calculera en fonction de $L$.

Tournez la page S.V.P.



wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4926 - Wadifa Info - page 3/6

## Partie III

Dans cette partie, $\alpha = 1$ et l'on notera simplement $\Phi = \Phi_1$ ; c'est à dire si $f$ est élément de $E$, $g = \Phi(f)$ est définie par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

12. Soit $f$ dans $E$ et $g = \Phi(f)$. Montrer que si $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors $g$ admet une limite réelle en $+\infty$ que l'on précisera. La réciproque est-elle vraie ?

13. (a) Soit $f$ dans $E$ et $g = \Phi(f)$ et $T$ un réel strictement positif. On suppose que $f$ admet pour période $T$. Déterminer $\lim_{+\infty} g$ en fonction de $\int_0^T f(t)dt$. (on pourra commencer par calculer $g(nT)$ avec $n$ entier naturel non nul).

(b) Déterminer en fonction de $x$ un équivalent simple de $\int_0^x |\sin t|dt$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

14. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ telles que $f^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel réel et que l'application :

$$\mathcal{N} : f \to \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(x))^2\,dx}$$

est une norme sur $\mathcal{E}$.

(b) Soit $f \in \mathcal{E}$ et $g = \Phi(f)$. Grâce à une intégration par parties, justifier que pour tous $\varepsilon$, $A$ tels que $0 < \varepsilon < A$, on a :

$$\int_\varepsilon^A (g(x))^2\,dx \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^\varepsilon f(t)\,dt\right)^2 + 2\left|\int_\varepsilon^A g(t)f(t)dt\right| .$$

(c) En déduire que pour tout $f$ de $\mathcal{E}$, $\Phi(f)$ est aussi élément de $\mathcal{E}$ avec $\mathcal{N}(\Phi(f)) \leq 2\mathcal{N}(f)$. Comment interprétez-vous ce résultat ?

## PROBLÈME - II

### Partie A

On considère $E = \mathbb{R}_5[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5. On note $E_1$ l'ensemble des polynômes impairs de $E$ et $E_2$ l'ensemble des polynômes pairs de $E$. On désigne par $e_k$ $(0 \leqslant k \leqslant 5)$ les éléments de la base canonique de $E$ de sorte que $e_k(X) = X^k$. On nommera pareillement "base canonique" de $E_1$ (resp. de $E_2$) la base $\{e_1, e_3, e_5\}$ (resp. $\{e_0, e_2, e_4\}$) de $E_1$ (resp. $E_2$).

1° Justifier que $E_1$ et $E_2$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$.

2° a) Montrer que l'application $\sigma$ qui à tout polynôme $P \in E_2$ associe le polynôme $\sigma(P)$ défini par

$$\sigma(P)(X) = (X^2+1)P''(X) - XP'(X) \qquad (1)$$

définit un endomorphisme de $E_2$.



Tournez la page S.V.P.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4926 - Wadifa Info - page 4/6

b) Donner la matrice de $\sigma$ dans la base canonique $\{e_0, e_2, e_4\}$ de $E_2$.

c) Déterminer le noyau de $\sigma$, ainsi que ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

d) $\sigma$ est-il diagonalisable ?

3° a) Montrer que l'application $s$ qui à tout polynôme $P \in E_2$ associe le polynôme $s(P)$ défini par

$$s(P)(X) = (X^2 - 1)P''(X) + XP'(X) \qquad (2)$$

définit un endomorphisme de $E_2$.

b) Donner la matrice de $s$ dans la base canonique $\{e_0, e_2, e_4\}$ de $E_2$.

c) Déterminer le noyau de $s$, ainsi que ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

d) $s$ est-il diagonalisable ?

4° On considère l'application qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme $2XP(X) - P'(X)$.

a) Montrer que la restriction $f$ de cette application au sous-espace $E_2$ définit une application linéaire de $E_2$ dans $E_1$.

b) Déterminer la matrice de cette application dans les bases canoniques respectives de $E_2$ et $E_1$.

c) Montrer que $f$ est un isomorphisme.

## Partie B

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ non nécessairement de dimension finie. On désigne par $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, de sorte que $E = E_1 \oplus E_2$. On désigne par $s$ un endomorphisme de $E_2$ et par $f$ une application linéaire bijective de $E_2$ dans $E_1$.
À $x \in E$ s'écrivant $x = x_1 + x_2$, où $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, on associe

$$F(x) = f^{-1}(x_1) + f(x_2) + s(x_2). \qquad (3)$$

1° a) Prouver que $F$ est injective.

b) Prouver que $F$ est surjective (on ne suppose PAS que $E$ est de dimension finie) et exprimer $F^{-1}(y)$, où $y = y_1 + y_2 \in E$ et $(y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$.

2° a) On suppose que $F$ admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé, décomposé en $x = x_1 + x_2$ (où $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$). Prouver que $x_1$ et $x_2$ sont non nuls et que $x_2$ est vecteur propre de $s$.

b) Réciproquement, on suppose que $s$ admet une valeur propre réelle $\mu$. Prouver que $F$ admet au moins une valeur propre réelle $\lambda$. Déterminer un vecteur propre de $F$ associé à $\lambda$ en fonction d'un vecteur propre $x_2$ de $s$ associé à $\mu$.

c) Montrer que si $u_1, \ldots, u_t$ sont des vecteurs propres de $s$ indépendants et associés à une même valeur propre $\mu$ de $s$, alors les vecteurs propres de $F$ précédemment calculés sont indépendants.

*On suppose désormais $E$ de dimension finie, et on pose $n = \dim E_1$.*

3° a) Justifier que $\dim E_1 = \dim E_2 = n$ et $\dim E = 2n$.

b) Soit $\mu_1, \ldots, \mu_p$ les valeurs propres réelles distinctes de $s$. Prouver que $F$ admet $2p$ valeurs propres réelles distinctes.

c) Montrer que si $s$ est diagonalisable, $F$ l'est aussi.

:::::::::::::FIN :::::::::::::



wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4926 - Wadifa Info - page 5/6

# Wadifa Info

www.wadifa-info.com

**Le sujet suivant à préparer** — **النموذج التالي للتحضير**

## نموذج مباراة توظيف مهندسي الدولة بالاقتصاد والمالية 2024

Modèle de concours : Ingénieurs d'État – Ministère de l'Économie et des Finances 2024

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/687

**Chaîne WhatsApp** — **قناة واتساب**

## المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

www.wadifa-info.com/wa

**Chaîne YouTube** — **قناة يوتيوب**

## امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

**Envoyer à un ami** — **أرسل النموذج لصديق**

## شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me